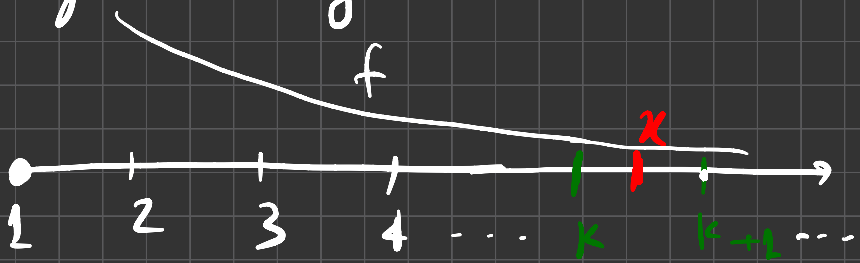
05/07 – AULA 07

TEOREMA (TESTE DA INTEGRAL)

Seja $f: [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ contínua e decrescente, com $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [1, +\infty)$. Tome $a_n = f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se, e somente se a integral $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ for convergente.



DEMONSTRAÇÃO:

Note que $[1, +\infty) = \bigcup_{k=1}^{\infty} [k, k+1]$

Como f é decrescente, por hipótese, segue que $\forall x \in [k, k+1]$, temos

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$$

Integrando de k até $k+1$:

$$\int_k^{k+1} f(k+1)\,dx \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq \int_k^{k+1} f(k)\,dx.$$

$$f(k+1)\int_k^{k+1} dx \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k)\cdot\int_k^{k+1} dx$$

$$\Longrightarrow f(k+1)\cdot \underbrace{x\Big|_k^{k+1}}_{=1} \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k)\, \underbrace{x\Big|_k^{k+1}}_{=1}$$

$$\Longrightarrow f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k)$$

Somando estas desigualdades para k de 1 até n, obtemos:

$$\sum_{k=1}^{n} \underbrace{f(k+1)}_{\substack{\| \\ a_{k+1}}} \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx}_{\int_1^2 f + \int_2^3 f + \cdots + \int_{n-1}^{n} f \;=\; \int_1^n f} \leq \sum_{k=1}^{n} \underbrace{f(k)}_{= a_k}$$

pois, $f(n) = a_n$

Então:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} a_k .} \quad (*)$$

($\Longrightarrow$) Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

Então, a seq (s_n) das somas parciais é convergente.

Logo, (s_n) é limitada superiormente.

Disso, $\exists\ M > 0$ tal que

$$s_n \le M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\underset{\displaystyle \sum_{k=1}^{n} a_k}{\shortparallel}$$

Ou seja,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = s_n \le M.$$ Juntando com $(*)$,

vem:

$$\int_1^n f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{n} a_k = s_n \le M, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

i.e.;

$$\int_1^n f(x)\,dx \le M, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ou seja, a integral imprópria $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ é convergente.

$(\Leftarrow)$: Reciprocamente, suponha que

$$\exists \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = L \in \mathbb{R}.$$

Então $\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}}}$

$$\int_1^n f(x)\,dx \le L$$

Assim, de $(*)$, vem:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq L$$

$$\parallel$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - a_1 \leq L$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k \leq a_1 + L \,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ou seja, a seq. (s_n) das somas parciais $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ é limitada superiormente.

Como $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [1, +\infty)$ e $a_n = f(n)$, então $a_n \geq 0$, $\forall n$. Logo, (s_n) é crescente. Sendo também limitada superiormente (feito acima), segue por teorema que (s_n) é convergente.

Ou seja $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ é convergente,

i.e., $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

$\square$

Ex.: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p>0$.

Tal série chama-se SÉRIE HIPER-HARMÔNICA.

Quando $p=1$, a série hiper-harmônica torna-se harmônica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots,$$

que já vimos que é divergente.

Vamos estudar os casos quando $p>1$ e $p<1$.

Defina $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, por

$$f(x) = \frac{1}{x^p} = x^{-p}$$

Note que, $x^p > 0 \Rightarrow \frac{1}{x^p} > 0$

Além disso, temos:

$$f'(x) = (x^{-p})' = -p \cdot x^{-p-1} = \frac{-p}{x^{p+1}} < 0,$$

$$\forall x \in (1, +\infty).$$

Ou seja, f é decrescente em $(1, +\infty)$.

Além disso, f é contínua e $f(x) = \frac{1}{x^p} > 0$, $\forall x \in [1, +\infty)$. Logo, estamos nas hipóteses do teste da integral. Assim:

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-p}\,dx$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \frac{b^{1-p}}{1-p} - 0 =$$

$$= \begin{cases} \infty, & \text{se } 0 < p < 1. \\ 0, & \text{se } p > 1. \end{cases}$$

Conclusão: a série hiper-harmônica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$$ é convergente se $p > 1$

e é divergente se $0 < p \leq 1$.

↳ $p=1$ ESTÁ INCLUSO POIS É O CASO DA SÉRIE HARMÔNICA.

Ex.: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente, pois é a série hiper-harmônica com $p = 2 > 1$.

LISTA 02

09 - j) : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\arctan n}}{1+n^2}$.

Defina $f: [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}$$

Note que $e^{\arctan x} > 0$ e $1+x^2 > 0$.

$\Rightarrow$ $f(x) > 0, \ \forall x \in [1, +\infty)$

Além disso f é cont. pois é composição de funções contínuas.

Ainda:

$$f'(x) = \left(\frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\right)' =$$

$$= \frac{\cancel{(1+x^2)}\, e^{\arctan x} \cdot \frac{1}{\cancel{1+x^2}} - e^{\arctan x} \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{\overbrace{e^{\arctan x}}^{>0} \cdot \overbrace{(1-2x)}^{<0,\text{ pois } x \geq 1}}{\underbrace{(1+x^2)^2}_{>0}} < 0, \ \forall x \in (1, +\infty).$$

$\Rightarrow f'(x) < 0, \quad \forall x \in (1, +\infty).$

Logo f é também decrescente.

Assim, estamos nas hipóteses do teste da integral. Dessa,

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\,dx = \lim_{b \to +\infty} e^{\arctan x}\Big|_1^b =$$

$$\int e^u\,du = e^u + C$$

$$u = \arctan x \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(e^{\arctan b} - e^{\arctan 1} \right) =$$

$$= e^{\arctan(+\infty)} - e^{\frac{\pi}{4}} = e^{\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{4}}$$

Logo, $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Portanto, a série $\sum_{n \geq 1}^{+\infty} \frac{e^{\arctan n}}{1+n^2}$ é convergente.

CONVERGÊNCIA ABSOLUTA:

Def.: Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série. Dizemos que a série $\sum a_n$ converge absolutamente se a série dos módulos $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

TEOREMA: (CRITÉRIO DE CAUCHY) Se uma série for absolutamente convergente, então a série é convergente.

Def.: Quando a série $\sum a_n$ for convergente, mas $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ for divergente, diremos que a série é CONDICIONALMENTE CONVERGENTE.

SÉRIE ALTERNADA:

Def. Dizemos que uma série é alternada quando os sinais de seus termos vão alternando entre positivos e negativos. Neste caso, escreveremos:

$$\sum (-1)^n a_n \quad \text{ou} \quad \sum (-1)^{n+1} \cdot a_n.$$

Ex.: $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots$$

(SÉRIE ALTERNADA)

TEOREMA: (TESTE DE LEIBNIZ) – PARA SÉRIES ALTERNADAS.

Seja $\sum (-1)^n \cdot a_n$ uma série alternada.

Se:

(i) $a_{n+1} < a_n, \ \forall n$ (i.e., o termo geral é decrescente)

(ii) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$,

então a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ é convergente.

Ex.: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ – série alternada.

Note que $a_n = \frac{1}{n}$ e:

(i) $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$ ✓

(ii) $\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ ✓

Logo, pelo teste de Leibniz, segue que a série $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ é convergente.

No entanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad , \text{ ou seja,}$$

a série dos módulos resulta na série harmônica, que é divergente.

Logo, temos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ é convergente, mas a convergência é <u>CONDICIONAL</u>, pois a série dos módulos diverge.

<u>TEOREMA:</u> (UPGRADE DO TESTE DA COMPARAÇÃO)

Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries numéricas, com $|a_n| \leq b_n$, $\forall n \geq n_0$. Então, se a série $\sum b_n$ converge, segue que a série $\sum a_n$ converge absolutamente.

<u>TEOREMA:</u> Se $\sum a_n$ é série tal que

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = c \; , \text{ então}$$

se $c<1$, a série converge absolutamente, e se $c>1$ ou $c=\infty$, a série diverge e $c=1$, o teste é inconclusivo.

(UPGRADE DO TESTE DA RAZÃO)

<u>TEOREMA:</u> Se $\sum a_n$ é série tal que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = c \; , \text{ então:}$$

se $c<1$, a série converge absolutamente, e se $c>1$ ou $c=\infty$, a série diverge e $c=1$, o teste é inconclusivo.

(UPGRADE DO TESTE DA RAIZ)