05/07/23 – AULA 07

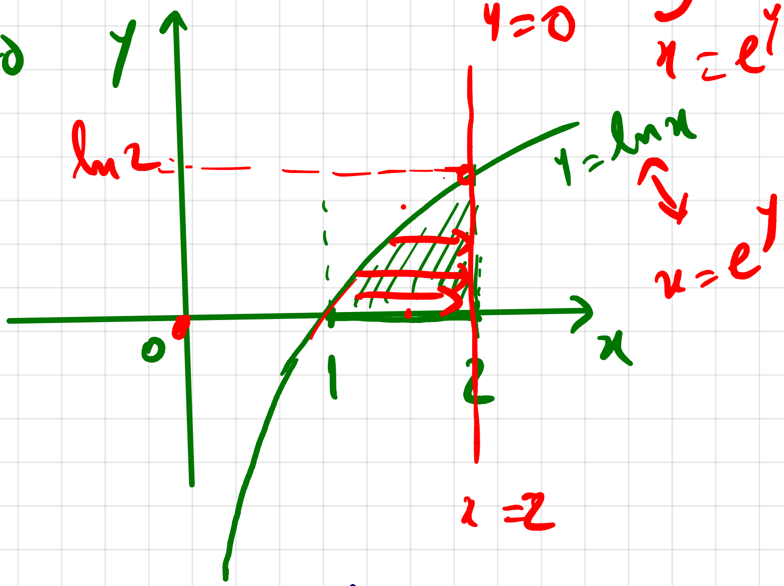
Do exercício do final da aula passada:

07) Idem para $\int_{x=1}^{x=2}\int_{y=0}^{y=\ln x} f(x,y)\, \underbrace{dy}_{1^o}\, \underbrace{dx}_{2^o}$.

MUDAR A ORDEM DE INTEGRAÇÃO.

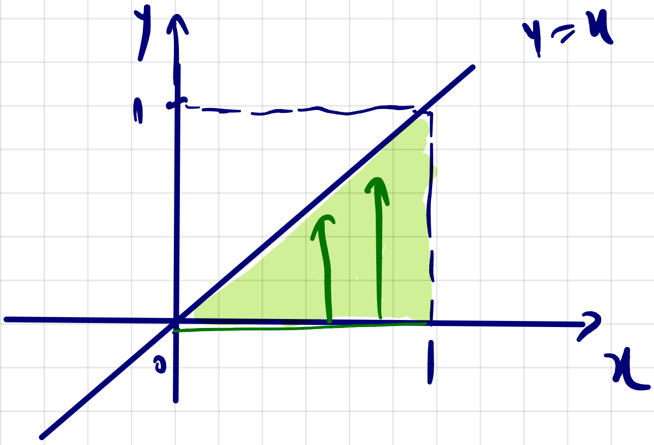
SOLUÇÃO:

$$\int_{x=1}^{x=2}\int_{y=0}^{y=\ln x} f(x,y)\, dy\, dx = \int_{y=0}^{y=\ln 2}\int_{x=e^y}^{x=2} f(x,y)\, dx\, dy$$



08) Calcule $\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=y}^{x=1} \sqrt{1+x^2}\, dx\, dy$.

SOLUÇÃO: Vamos mudar a ordem de integração.



$$\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=y}^{x=1}\sqrt{1+x^2}\,dx\,dy = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=x}\underbrace{\sqrt{1+x^2}}_{\text{CONSTANTE PARA } y}\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=1}\sqrt{1+x^2}\underbrace{\int_{y=0}^{y=x} dy}_{y}\,dx = \int_{x=0}^{x=1}\sqrt{1+x^2}\cdot \underbrace{y\Big|_0^x}_{= x-0=x}\,dx$$

TFC

$$= \frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=1}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 =$$

$$\int u^k\,du = \frac{u^{k+1}}{k+1}+C$$

$$u = 1+x^2 \rightarrow du = 2x\,dx$$

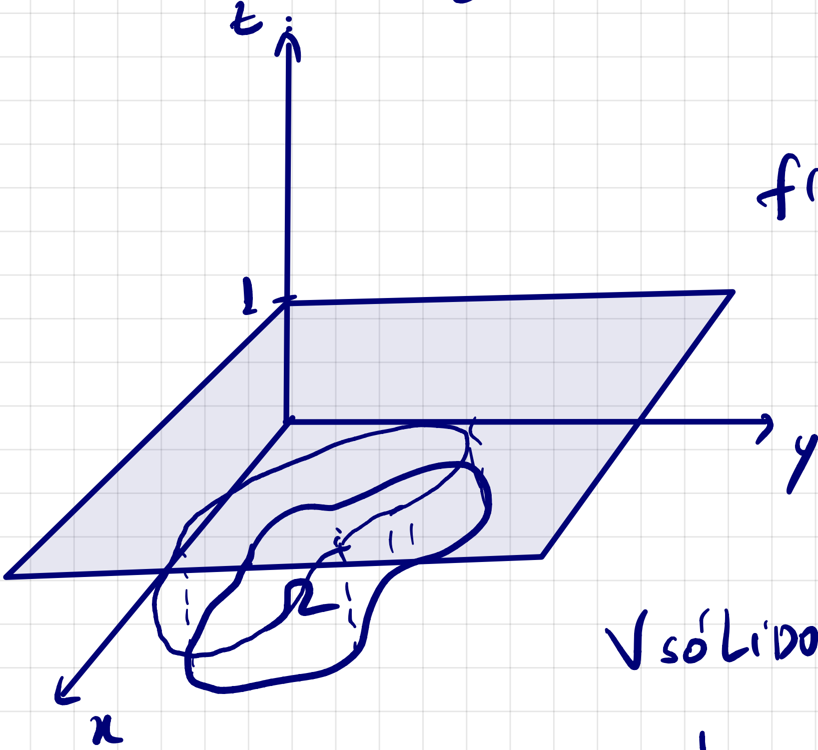
$$\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}\,\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}\cdot\left[\sqrt{2^3}-\sqrt{1}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right) = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

ÁREA DE UMA REGIÃO NO PLANO.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conj. J-mensurável.
(Doravante, a região de integração sempre será J-mensurável). A medida da sua área A é definida por:

$$A = \iint_\Omega 1 \cdot dx\,dy$$



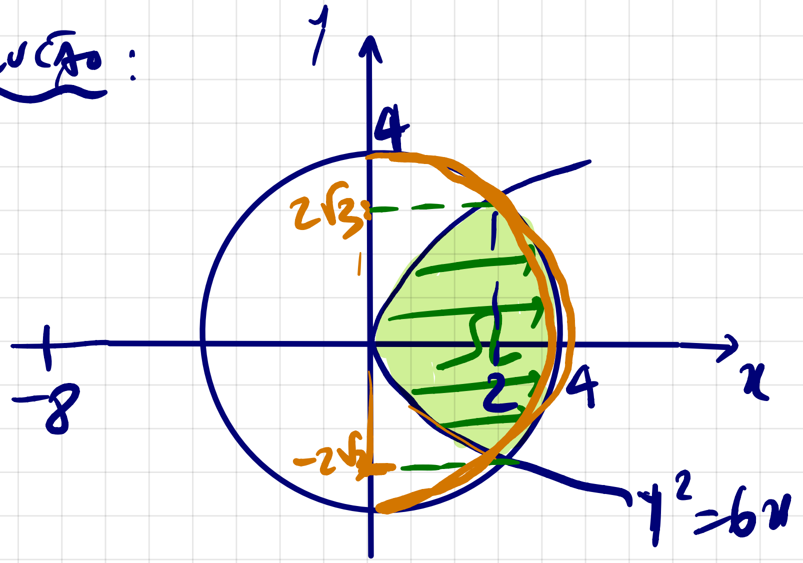
$f(x,y) = 1.$

$V_{\text{SÓLIDO}} = A \cdot 1$

Disso, podemos, numericamente, interpretar $\iint_\Omega dx\,dy$ como sendo a área A da região Ω no plano xy.

Ex.: Obtenha a área da região Ω formada pelas curvas $x^2+y^2=16$ e $y^2=6x$.

Solução:



$y^2=6x$

$x = \frac{1}{6}y^2$

interseção: $\begin{cases} x^2+y^2=16 \rightsquigarrow x=+\sqrt{16-y^2} \\ y^2=6x \end{cases}$

$x^2+6x=16$

$\Leftrightarrow x^2+6x-16=0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36+64}}{2} = \dfrac{-6\pm 10}{2}$ → $x=2$; → $x=-8$

Como $x=-8$ não tem sentido no nosso problema (veja na figura), então o único valor admissível para x é $x=2$.

Neste caso, $y^2=6\cdot 2 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{12}$

$y = \pm 2\sqrt{3}$

Assim, a área da região Ω será:

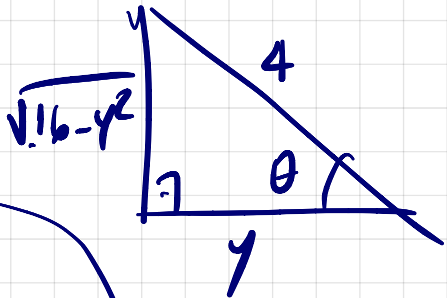
$$A = \int_{y=-2\sqrt{3}}^{y=2\sqrt{3}} \int_{x=\frac{1}{6}y^2}^{x=\sqrt{16-y^2}} 1 \, dx \, dy =$$

$$= \int_{y=-2\sqrt{3}}^{y=2\sqrt{3}} x \Big|_{\frac{y^2}{6}}^{\sqrt{16-y^2}} dy = \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \left(\sqrt{16-y^2} - \frac{y^2}{6}\right) dy$$

$$= \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \sqrt{16-y^2}\, dy - \frac{1}{6}\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} y^2 dy = \ldots \quad (*)$$

CÁLCULO II.

1.º! $\bullet \displaystyle\int \sqrt{16-y^2}\, dy$



$\text{sen}\,\theta = \dfrac{\sqrt{16-y^2}}{4}$

$\sqrt{16-y^2} = 4\,\text{sen}\,\theta$

SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA

$\cos\theta = \dfrac{y}{4}$

$\Rightarrow y = 4\cos\theta.$

$\Rightarrow dy = -4\,\text{sen}\,\theta\, d\theta.$

$$\Rightarrow \int \sqrt{16-y^2}\, dy = \int 4\,\text{sen}\,\theta \cdot (-4\,\text{sen}\,\theta\, d\theta) =$$

$$-16 \int \text{sen}^2\theta\, d\theta = -16 \int \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

$$= -\frac{16}{2}\int d\theta + \frac{16}{2\cdot 2}\int \cos 2\theta \, 2\, d\theta =$$

$$= -8\,\theta + 4\cdot\left(+\operatorname{sen} 2\theta\right) + C$$

$$= -8\theta + 4\cdot\left(2\operatorname{sen}\theta \cos\theta\right) + C$$

$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

$$= -8\cdot \arccos\left(\frac{y}{4}\right) + \cancel{8}^{\,2}\cdot \frac{\sqrt{16-y^2}}{\cancel{4}}\cdot\frac{y}{\cancel{4}_{\,2}} + C$$

$$= -8\arccos\left(\frac{y}{4}\right) + \frac{y\sqrt{16-y^2}}{2} + C$$

$$\Rightarrow \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \sqrt{16-y^2} = \ldots\ldots \quad \text{etc.}$$

$\underline{\underline{2^{\underline{o}}}}$: $-\frac{1}{6}\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} y^2\,dy$ (fácil)

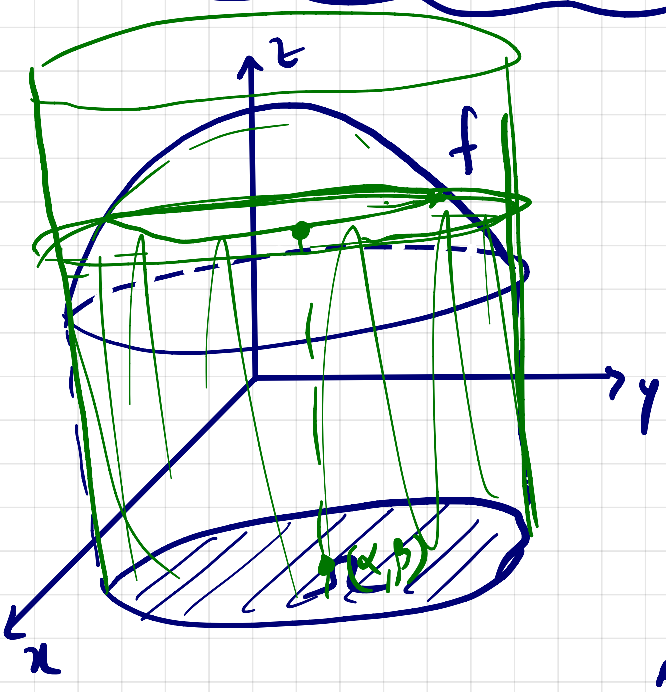
Por fim, montar (*)

TEOREMA DA MÉDIA: Seja $f:\Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua em Ω, Ω compacto$^{(*)}$ e convexo$^{(**)}$. Então existe $(\alpha,\beta)\in\Omega$ tal que

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = A\cdot f(\alpha,\beta),$$

onde A denota a área da região Ω.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA NO CASO QUANDO $f \geq 0$:

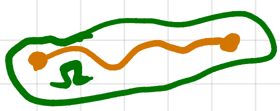


$$\iint_\Omega f = \text{VOLUME DO SÓLIDO}$$

SE CONSIDERARMOS UM "COPO" DE BASE IGUAL A Ω, E SE O SÓLIDO ABAIXO DE f FOSSE ÁGUA CONGELADA NESSE FORMATO, AO DERRETÊ-LA, O LÍQUIDO OBTIDO TERIA MESMO VOLUME DO ORIGINAL (NÃO ESTAMOS ADMITINDO PERDAS), E ESTARIA NUMA ALTURA $h = f(\alpha,\beta)$.

(*) COMPACTO é limitado e fechado

(**) Um conj. Ω é CONEXO se $\forall P, Q \in \Omega$, existir uma linha poligonal γ inteiramente contida em Ω, ligando P e Q.



DEMONSTR. DO TEOREMA:

Como $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ é contínua no Ω compacto (i.e, limitado e fechado), então, pelo Teorema de WEIERSTRASS (TEOREMA DO VALOR EXTREMO), segue que f assume um valor máximo e um valor mínimo em Ω, i.e,

$$\exists\ f(x_0,y_0)=\min_{\Omega} f \quad , \quad \exists\ f(x_1,y_1)=\max_{\Omega} f .$$

Assim $\forall (x,y)\in\Omega$, temos:

$$f(x_0,y_0)\leq f(x,y)\leq f(x_1,y_1).$$

Integrando, vem:

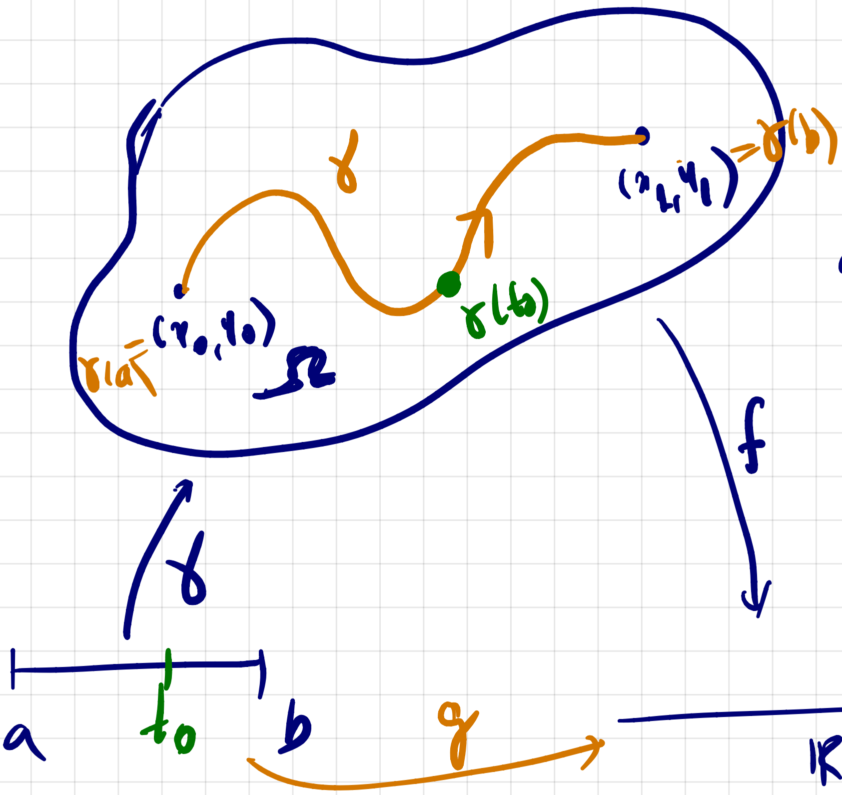
$$\iint_{\Omega} \underbrace{f(x_0,y_0)}_{\text{CONST.}}\,dx\,dy \leq \iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_{\Omega} \underbrace{f(x_1,y_1)}_{\text{CONST.}}\,dx\,dy$$

$$\Rightarrow f(x_0,y_0)\cdot \underbrace{\iint_{\Omega} dx\,dy}_{A} \leq \iint_{\Omega} f \leq f(x_1,y_1)\cdot \underbrace{\iint_{\Omega} dx\,dy}_{A}$$

(ÁREA DA REGIÃO Ω

Ou seja, obtemos

$$\boxed{f(x_0,y_0) \leq \frac{1}{A} \cdot \iint_{\Omega} f \leq f(x_1,y_1)} \quad (*)$$



Como Ω é convexo, seja $\gamma : [a,b] \to \Omega$ curva tal que

$\gamma(a) = (x_0,y_0)$

$\gamma(b) = (x_1,y_1)$

Defina $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$g(t) = f(\gamma(t))$$

g é contínua pois f e γ o são.

Note que

- $g(a) = f(\gamma(a)) = f(x_0,y_0)$
- $g(b) = f(\gamma(b)) = f(x_1,y_1)$

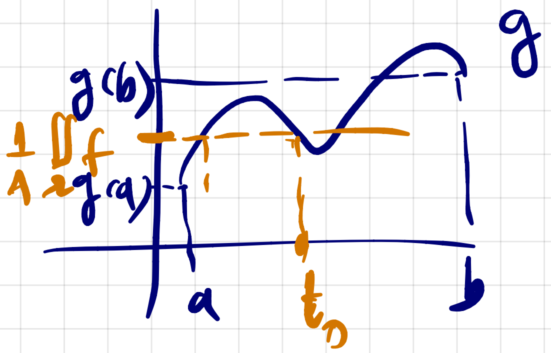
Então, de $(*)$, temos:

$$\underbrace{f(x_0,y_0)}_{\substack{\vee\!\! \mid \\ g(a)}} \leq \frac{1}{A} \cdot \iint_{\Omega} f \leq \underbrace{f(x_1,y_1)}_{= \, g(b)}$$

i.e., temos

$$g(a) \leq \overbrace{\frac{1}{A} \iint_{\Omega} f}^{\in \mathbb{R}} \leq g(b),$$

com g cont. em $[a,b]$.



Estamos nas hipóteses do teorema do valor intermediário (T.V.I), do Cálculo I. Então,

$\exists\ t_0 \in [a,b]$, tal que

$$\underset{\displaystyle f(\gamma(t_0))}{\overset{\displaystyle g(t_0)}{\parallel}} = \frac{1}{A} \iint_{\Omega} f$$

Escreva $\gamma(t_0) := (\alpha, \beta)$

Então, $$f(\alpha,\beta) = \frac{1}{A} \cdot \iint_{\Omega} f$$

$\square$

<u>Obs.:</u> $f(\alpha,\beta)$ no caso chama-se VALOR MÉDIO da integral dupla.

EXEMPLO: Calcule o valor médio de

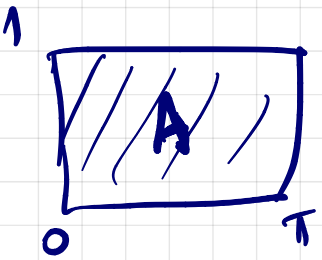
$$f(x,y) = x \cdot \cos xy \quad \text{em } [0,\pi] \times [0,1]$$

SOLUÇÃO: Seja $f(\alpha,\beta)$ o valor médio.

Então,

$$f(\alpha,\beta) = \frac{1}{A} \cdot \iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy,$$

onde $A = 1 \times \pi = \pi$



$$\Rightarrow f(\alpha,\beta) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=0}^{x=\pi} \int_{y=0}^{y=1} x \cdot \cos xy \, dy \, dx$$

$\int \cos u \, du$

$u = xy \Rightarrow du = x\,dy$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{x=0}^{x=\pi} \operatorname{sen} xy \Big|_{y=0}^{y=1} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\operatorname{sen} x - \underbrace{\operatorname{sen} 0}_{=0})\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot (-\cos x)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot (-\cos \pi + \cos 0)$$

$$= \frac{2}{\pi}$$