21/07/23 – AULA 11

$f \in C^{\infty}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

SÉRIE DE TAYLOR PARA f DESENVOLVIDA EM $x = a$.

Vamos lidar com funções em que a série de Taylor desenvolvida em $x=a$ para ela de fato represente a f. No entanto, há casos "exóticos" em que a representação em série de Taylor para f não representa f.

EX: $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$

É possível desenvolver uma série de Taylor a partir de f, MAS sua representação será a f apenas em $x = 0$.

O que foi exposto acima é garantido pelo seguinte teorema:

TEOREMA: Seja $f \in C^{\infty}$ em $|x-a|<R$.

Então a f possui uma representação em série de Taylor em $x=a$ se, e somente se

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0,$$ onde:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

para algum c_n entre x e a.

DEMONSTRAÇÃO: Como $f \in C^{\infty}$ (i.e., f é infinitamente continuamente derivável), então podemos escrever f usando a fórmula de Taylor. Assim, sejam $P_n(x)$ e $R_n(x)$, respectivamente, o polinômio de Taylor para f e o seu resto. Assim:

$$\boxed{f(x) = P_n(x) + R_n(x)} \quad (*)$$

Vamos mostrar que

$$R_n(x) \to 0 \iff P_n(x) \to f(x)$$

Primeiramente, suponha que

$$R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

De $(*)$, temos:

$$P_n(x) = f(x) - R_n(x)$$

Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\big(\underbrace{f(x)}_{\substack{\text{CONSTANTE}\\ \text{PARA O LIMITE}}} - R_n(x)\big)$

$$= f(x) - \underbrace{\lim_{n\to\infty} R_n(x)}_{\to 0 \text{ por hipótese}} = f(x)$$

Reciprocamente, suponha que

$$P_n(x) \to f(x).$$

A mostrar: $R_n(x) \to 0$.

De fato, por $(*)$, temos:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty}\big(\underbrace{f(x)}_{\substack{\text{CONST. PARA}\\ \text{O LIMITE}}} - P_n(x)\big)$$

$$= f(x) - f(x) = 0$$

$\square$

Ex.: A representação em série de Taylor para $f(x) = \operatorname{sen} x$ em $x = 0$, de fato é

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Vejamos:

$$f(x) = \operatorname{sen} x = P_n(x) + R_n(x), \text{ então}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}, \text{ onde}$$

c_n entre x e 0.

Mostremos que $R_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

De fato, note que $f^{(n+1)}(c_n) = \begin{cases} \pm \operatorname{sen} c_n \\ \pm \cos c_n \end{cases}$

Assim, avaliando:

$$0 \leq |R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \frac{\overbrace{|f^{(n+1)}(c_n)|}^{\leq 1} \cdot |x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

obs.:

$$|f^{(n+1)}(c_n)| = \begin{cases} |\pm \operatorname{sen} c_n| \leq 1; \text{ ou} \\ |\pm \cos c_n| \leq 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{0 \leq |R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}} \qquad (I)$$

Note que $\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ pode ser visto como o termo geral da série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = e^{|x|},$$

que converge $\forall x \in \mathbb{R}$ (pois o raio de convergência da exponencial é infinito)

Logo, o termo geral da série $\sum \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ tende a zero, i.e.,

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0,$$

Disso, de (I), teremos:

$$0 \leq |R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\Longrightarrow \quad R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{(PELO T. DO SANDUÍCHE)}$$

Logo, de fato a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

representa $f(x) = \operatorname{sen} x$.

SÉRIE BINOMIAL:

É a série que se usa para representar o desenvolvimento em série de Taylor para funções do tipo $(1+x)^m$, com $m \in \mathbb{Q}$.

O caso $m \in \mathbb{N}$ é simples, pois será simplesmente um desenvolvimento binomial. Assim, o que vamos descrever representa o caso $m \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$.

Seja $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^m$, com $m \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$. Vamos obter o desenvolvimento em série de Taylor para f no ponto $x = a$.

- $f(x) = (1+x)^m \Rightarrow f(a) = (1+a)^m$
- $f'(x) = m \cdot (1+x)^{m-1} \cdot 1 \Rightarrow f'(a) = m(1+a)^{m-1}$

- $f''(x) = m(m-1).(1+x)^{m-2} \Rightarrow f''(a) = m(m-1)(1+a)^{m-2}$

- $f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}$

$$\Rightarrow f'''(a) = m(m-1)(m-2)(1+a)^{m-3}$$

$\vdots$

- $f^{(k)}(x) = m(m-1)\cdots(m-(k-1)).(1+x)^{m-k}$

$$\Rightarrow f^{(k)}(a) = m(m-1)\cdots(m-k+1)(1+a)^{m-k}$$

Assim, temos:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

$$f(x) = (1+a)^m + m(1+a)^{m-1}(x-a) +$$

$$+ \frac{m(m-1).(1+a)^{m-2}}{2!}(x-a)^2 +$$

$$+ \frac{m(m-1).(m-2).(1+a)^{m-3}}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

Em particular, para $a=0$, teremos:

$$f(x) = 1 + m \cdot x + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!} x^4 + \cdots$$

$$= 1 + \sum_{K=1}^{+\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} \cdot x^k$$

$\Rightarrow$ $f(x) = (1+x)^m$, $m \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$,

terá o desenvolvimento, chamado de BINOMIAL, dado por: (em $x=0$):

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} x^k$$

Resta determinar o seu raio de convergência

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\cancel{m} \cdot \cancel{(m-1)} \cdot \cancel{\cdots} \cancel{(m-n+1)}}{\cancel{n!}} \times \frac{(n+1)\cancel{!}}{\cancel{m(m-1)} \cancel{\cdots} (m-n+2)} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)}{n-m+2} \right| = 1.$$

Para $f(x) = (1-x)^m$, teremos

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} (-1)^k \cdot x^k$$

$R = 1.$

(EXERCÍCIO)

EXEMPLO: Encontre a série de Taylor para $f(x) = \sqrt{1-x}$ em $x = 0$.

SOLUÇÃO:

$f(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}}$. (SÉRIE BINOMIAL)

$\left(m = \frac{1}{2}\right)$

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} (-1)^k \cdot x^k$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{1}{2}-1\right)}_{-\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{2}-2\right)}_{=-\frac{3}{2}}\cdots\underbrace{\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}_{\frac{3-2k}{2}}}{k!} (-1)^k x^k$$

$\frac{1}{2} - 3$

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overbrace{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(\frac{3-2k}{2}\right)}^{k \text{ produtos} \,;\, k-1 \text{ SINAIS NEGATIVOS}}}{k!} (-1)^k \cdot x^k$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-3)\cdot(-1)^{k-1}}{2^k \cdot k!} \cdot (-1)^k \cdot x^k.$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2(k-1)-1)}{2^k\cdot k!} \cdot \underbrace{(-1)^{2k-1}}_{= -1,\ \forall k} \cdot x^k$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2(k-1)-1)}{2^k\cdot k!} \cdot x^k.$$

EXERCÍCIOS:

LISTA 03 |

12) $\int x^2 \cdot \ln(1+x)\, dx$.

Neste caso seria possível calcular esta integral por partes. Mas, o objetivo aqui é via séries de potência.

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot x^n .$$

Então:

$$\int x^2 \ln(1+x)\, dx = \int_0^x t^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot t^n\, dt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \int_0^x t^2 \cdot t^n\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \int_0^x t^{n+2}\, dt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \; \frac{t^{n+3}}{3} \Bigg|_0^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{x^{n+3}}{3}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{3n} \times \frac{3(n+1)}{(-1)^{n+1}} \right| = 1 .$$