19/07/23 – AULA 10

SÉRIE DE TAYLOR.

Seja $f(x)$ uma função tal que

$$f(x) = a_0 + a_1 . x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots ,$$

ou seja, expandida em série de potências, possuindo um raio de convergência $R > 0$.

Observando que tal representação em série é um polinômio (de grau "INFINITO") e como todo polinômio é C^∞ (ou seja, infinitamente derivável e contínuo), então, vamos determinar os valores de $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, etc.

- $\boxed{f(0) = a_0}$ $\rightsquigarrow$ $a_0 = f(0)$

$$f'(x) = a_1 + 2 . a_2 x + 3 a_3 x^2 + 4 . a_4 x^3 + \cdots$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(0) = a_1} \rightsquigarrow a_1 = \frac{f'(0)}{0!}$$

$$f''(x) = 2 . a_2 + 3 . 2 . a_3 x + 4 . 3 . a_4 x^2 + 5 . 4 . a_5 x^3 + \cdots$$

$$\Rightarrow \boxed{f''(0) = 2 . a_2} \rightarrow a_2 = \frac{f''(0)}{2!}$$

$$f'''(x) = 3.2.1\, a_3 + 4.3.2.\, a_4 . x + 5.4.3.\, a_5 x^2 + \dots$$

$$\Rightarrow \boxed{f'''(0) = 3.2.1.\, a_3} \to a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}$$

$$f^{(4)}(x) = 4.3.2.1.\, a_4 + 5.4.3.2.\, a_5\, x + \dots$$

$$\Rightarrow \boxed{f^{(4)}(0) = 4.3.2.1.\, a_4} \to a_4 = \frac{f^{(4)}(0)}{4!}$$

$$\vdots$$

Seguindo indutivamente, obtemos, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Assim, temos:

$$f(x) = a_0 + a_1 . x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

$$= f(0) + \frac{f'(0)}{1!} . x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

onde denotamos $f^{(0)}(0) = a_0$

Esta representação chama-se DESENVOLVIMENTO EM SÉRIE DE TAYLOR de $f(x)$ NO PONTO $x=0$.

Obs.: Quando a série de Taylor se desenvolve (como acima) na origem, ela chama-se SÉRIE DE MACLAURIN.

De forma geral, a série de Taylor em $x=a$ será:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot \underbrace{(x-a)}_{t} + a_2 \underbrace{(x-a)}_{t}^2 + \cdots$$

ESCREVA: "$x - a = t$"

$$= a_0 + a_1 \cdot t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots$$

Disso:

$$\Rightarrow \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \left.\frac{f^{(n)}(t)}{n!}\right|_{t=0}$$

$$= \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)\Bigg|_{\substack{x-a=0\\ (x=a)}} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Ou seja:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-2)^2 + \cdots$$

SÉRIE DE TAYLOR DESENVOLVIDA NO PONTO $x=a$.

A série de Taylor em $x=a$ é uma aproximação de um polinómio a uma função f, numa vizinhança do ponto $x=a$.

EXEMPLOS: Desenvolver a série de Taylor para as funções nos pontos indicados:

01) $f(x) = e^x$ em $x = 0$.

SOLUÇÃO: $f(0) = e^0 = 1$.

Como

$e^x = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots,$

então $f^{(n)}(0) = e^0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Assim:

$$f(x) = e^x = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \cdots$$

$$= 1 + 1 \cdot x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \cdots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$R = \frac{1}{\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

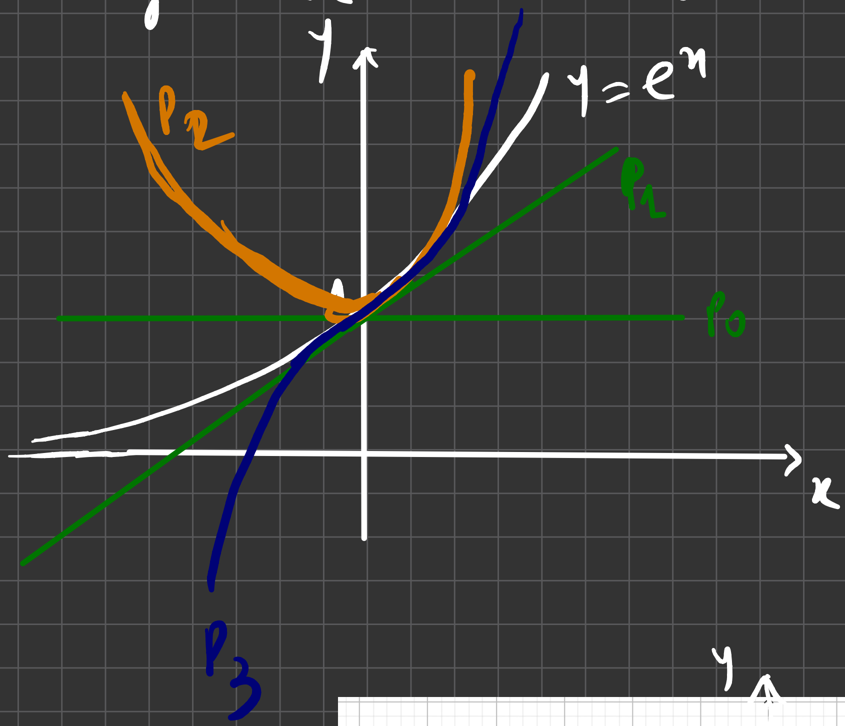
$a_n = \frac{1}{n!}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}} = +\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{R = +\infty}$$

Ou seja a série dada converge $\forall x \in \mathbb{R}$.



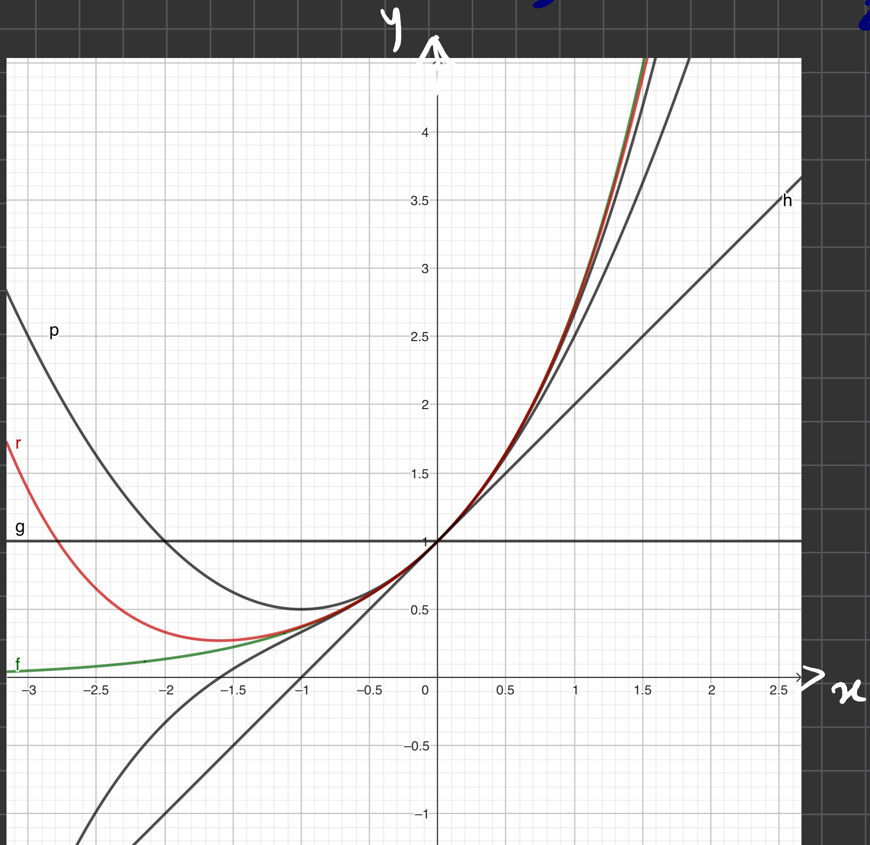
$P_0(x) = 1$

$P_1(x) = 1 + x$

$P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$

PELO GEOGEBRA



02) $f(x) = \operatorname{sen} x$ NO PONTO $x = 0$.

SOLUÇÃO:

$f(x) = \operatorname{sen} x = f^{(4)}(x) = f^{(8)}(x)$

$f'(x) = \cos x = f^{(5)}(x) = f^{(9)}(x)$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x = f^{(6)}(x) = f^{(10)}(x)$

$f'''(x) = -\cos x = f^{(7)}(x)$

$\vdots$

$f(0) = f^{(4)}(0) = f^{(8)}(0) = \operatorname{sen} 0 = 0$

$f'(0) = f^{(5)}(0) = f^{(9)}(0) = \cos 0 = 1$

$f''(0) = f^{(6)}(0) = f^{(10)}(0) = \operatorname{sen} 0 = 0$

$f'''(0) = f^{(7)}(0) = f^{(11)}(0) = -\cos 0 = -1$

Assim, vamos obter:

$$\operatorname{sen} x = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$= 0 + 1 \cdot x + 0 - \frac{1}{3!}x^3 + 0 + \frac{1}{5!}x^5 + 0 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{(2n+3)!}{(-1)^{n+1}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)(2n+2)\cancel{(2n+1)!}}{\cancel{(2n+1)!}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{R = +\infty}$$

$y = \operatorname{sen} x$

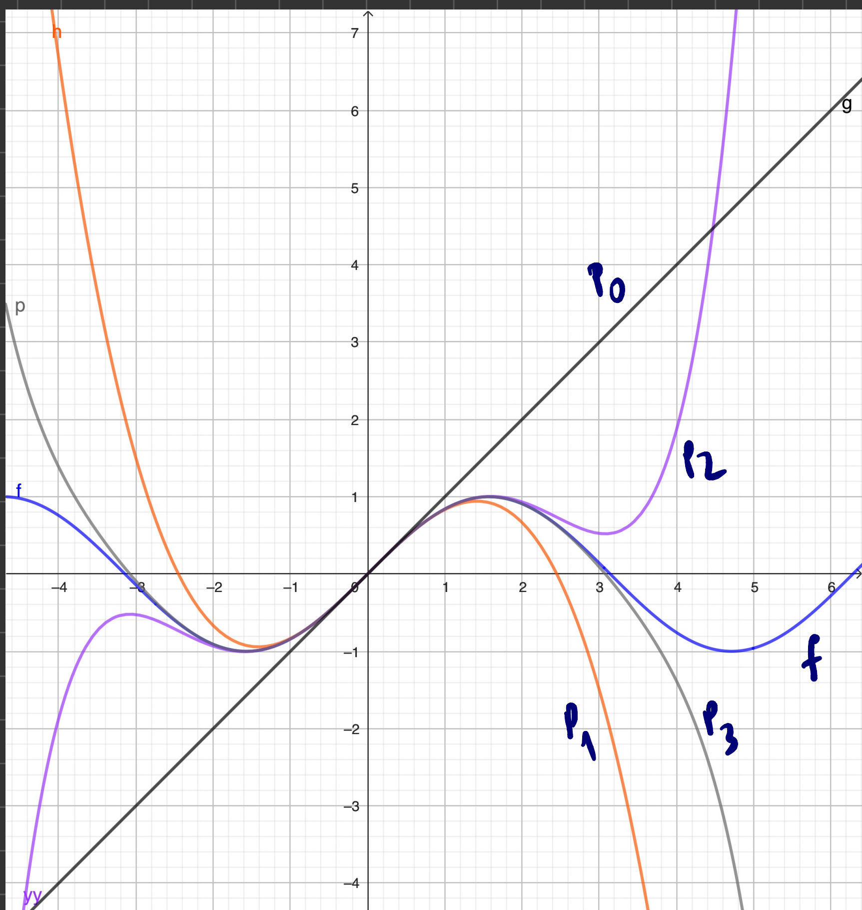
$P_0(x) = x$

$P_1(x) = x - \frac{x^3}{6}$

$P_2(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

$P_3(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$

$\vdots$



03) $f(x) = \cos x$ em $x = 0$ (exercício)

Vamos obter

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} \quad ; \quad R = +\infty$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

---

04) $f(x) = \sec x$ no ponto $x = \frac{\pi}{4}$.

$$f'(x) = \sec x \cdot \tan x$$

$$f''(x) = \sec x \cdot \sec^2 x + \sec x \cdot \tan x \cdot \tan x$$

$$= \sec^3 x + \sec x \cdot \tan^2 x$$

$$= \sec x \left(\sec^2 x + \tan^2 x \right) =$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

$$= \sec x \left(\sec^2 x + \sec^2 x - 1 \right)$$

$$= 2\sec^3 x - \sec x$$

$$f'''(x) = 2 \cdot 3 \cdot \sec^2 x \cdot \sec x \cdot \tan x - \sec x \cdot \tan x$$

$$= \sec x \cdot \tan x \cdot \left(6 \sec^2 x - 1\right)$$

$$\vdots$$

Assim, em $x = \frac{\pi}{4}$, teremos:

- $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

- $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sec \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}$

- $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \sec^3 \frac{\pi}{4} - \sec \frac{\pi}{4}$

$$= 2 \cdot (\sqrt{2})^3 - \sqrt{2} = 4\sqrt{2} - \sqrt{2} = \underline{\underline{3\sqrt{2}}}$$

- $f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sec \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{\pi}{4} \cdot \left(6 \cdot \sec^2 \frac{\pi}{4} - 1\right)$

$$= \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \left(6 \cdot (\sqrt{2})^2 - 1\right) = \underline{\underline{11\sqrt{2}}}$$

$$\vdots$$

Assim, obtemos:

$$\sec x = f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right).\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2!}.\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 +$$

$$+ \frac{f'''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + \cdots$$

$$= \sqrt{2} + \sqrt{2}.\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{3\sqrt{2}}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{11\sqrt{2}}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + \cdots$$

PRODUTO DE SÉRIES DE POTÊNCIAS.

Sejam $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ duas séries de potência.

Queremos determinar

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)$$

Ou seja:

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots =$$

$$= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots) \cdot (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots)$$

$$= \underbrace{a_0 \cdot b_0}_{c_0} + \underbrace{(a_0 \cdot b_1 + a_1 b_0)}_{c_1} \cdot x + \underbrace{(a_0 b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 b_0)}_{c_2} x^2 +$$

$$+ \underbrace{(a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0)}_{c_3} x^3 + \dots$$

Disso, obtemos:

$$c_0 = a_0 \cdot b_0$$

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_2$$

$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 b_0$$

$$c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0$$

$$\vdots$$

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

$$= \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$$