Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Cálculo IV - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 01 de Exercícios - Integrais múltiplas (primeiros conceitos)

1. Sejam $P = \prod P_i$ e $Q = \prod Q_i$ partições de um bloco $A \subset \mathbb{R}^m$. Justifique através de um exemplo que a união $P \cup Q$ não é, em geral, uma partição de A. Em seguida, conclua que a partição $P + Q$ definida por
$$P + Q = \prod_{i=1}^{m} (P_i \cup Q_i)$$
é um refinamento para P e para Q.

2. Sejam $A \subset \mathbb{R}^m$ um bloco do $\mathbb{R}^m$, $f : A \to \mathbb{R}$ integrável, e sejam
$$m = \inf\{f(x) \,:\, x \in A\} \text{ e } \quad M = \sup\{f(x) \,:\, x \in A\}.$$
Mostre que
$$m \leq \frac{\int_A f(x)dx}{\mathrm{Vol}(A)} \leq M.$$

3. Adicionando a hipótese no exercício anterior de que f é contínua no bloco A, conclua que existe $c \in A$ tal que[1]
$$\int_A f(x)dx = f(c) \cdot \mathrm{Vol}A.$$

4. Encontre um intervalo fechado que contenha o valor da integral dupla dada em cada caso (**Obs.:** use o exercício 2).
   (a) $\int_R\!\int (x^2 + y^2)dA$, onde R é a região retangular com vértices em $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$.
   (b) $\int_R\!\int e^{xy}dA$, onde R é a região retangular com vértices em $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$.

5. Usando a definção de integral dupla como limite de somas de Riemann, calcule a integral $\int_A f(x, y)dxdy$, sendo:
   (a) $f(x, y) = x + 4y$, e A o bloco $[0, 2] \times [0, 1]$. (Resp.: 6)
   (b) $f(x, y) = 3x^2 + 2y$, e A o bloco $[0, 2] \times [0, 1]$. (Resp.: 10)

6. Se $X \subset \mathbb{R}^m$ tem medida nula, então, mostre que $\forall Y \subset \mathbb{R}^n$, o produto cartesiano $X \times Y$ tem medida nula em $\mathbb{R}^{m+n}$.

7. Mostre que a união enumerável de conjuntos de medida nula resulta em um conjunto de medida nula.

8. Se uma função integrável $f : A \to \mathbb{R}$ definida num bloco $A \subset \mathbb{R}^m$ é igual a zero, salvo num conjunto de medida nula, prove que $\int_A f(x)dx = 0$.

9. Justifique por que a bola fechada $B[a, r] \subset \mathbb{R}^m$ é um conjunto J - mensurável.

[1] usar o Teorema do valor intermediário