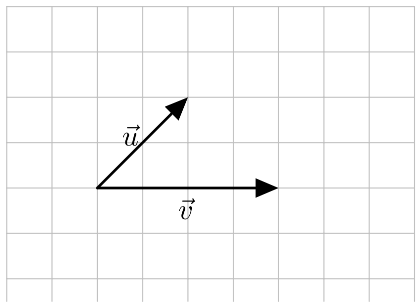
Fundação Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Física e Matemática
Disciplina de Álgebra linear e Geometria analítica
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 1 de Exercícios - Vetores no Plano

1. Considerando os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ no esquema abaixo, obter um representante geométrico para os vetores

   (a) $\vec{u}+\vec{v}$ (b) $\vec{v}-\vec{u}$ (c) $2\vec{u}-3\vec{v}$ (d) $\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}$ (e) $2\vec{u}+3\vec{v}$

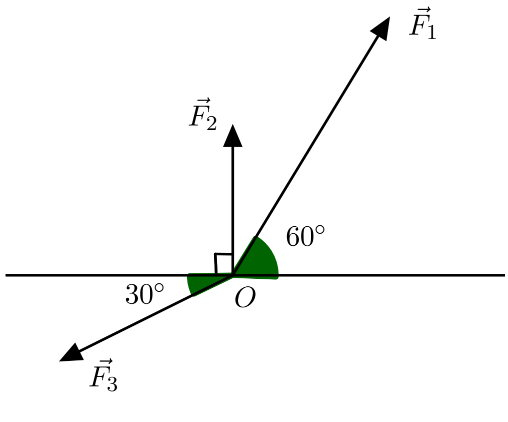


2. Justifique geometricamente que $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$, ou seja, que vale a associatividade para a soma de vetores.

3. Se o ângulo entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, no plano, mede $60°$, quanto mede o ângulo entre $-\vec{u}$ e $\vec{v}$?

4. Duas forças de magnitudes $60N$ e $80N$ formam um ângulo de 30^o e estão aplicados no mesmo ponto de um objeto. Determine o módulo da força resultante.[1]

5. Calcule a resultante das forças aplicadas ao ponto O da figura abaixo, sabendo que $||\vec{F}_1||=3$, $||\vec{F}_2||=1$ e $||\vec{F}_3||=2$.



6. Esboce no plano cartesiano a representação posicional de cada vetor $\overrightarrow{u}$ dado, de duas formas: a partir da origem $(0,0)$ e a partir do ponto P destacado. Depois, determine o módulo de cada vetor.

   (a) $\overrightarrow{u}=(3,4)$; $P(2,1)$ (b) $\overrightarrow{u}=(-2,5)$; $P(-3,4)$ (c) $\overrightarrow{u}=(4,0)$; $P(2,6)$.

7. Dado o vetor $\overrightarrow{u}=(\sqrt{3},1)$, determine seu módulo, sua direção e seu sentido. Represente-o no plano cartesiano e dê um outro vetor $\overrightarrow{v}$ equipolente a $\overrightarrow{u}$.

[1] **Obs.** Tem que usar uma fórmula da trigonometria....

8. Dados os pontos $P(2,5)$, $Q(1,6)$ e $R(-3,2)$, determine o ponto S tal que $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{RS}$ representem o mesmo vetor.

9. Dados $\overrightarrow{u} = (-3,4)$, $\overrightarrow{v} = (1,6)$ e $\overrightarrow{w} = (2,3)$, determine:

   (a) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. (b) $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{w}$. (c) $2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$. (d) $||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}||$.

10. Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa, justificando as falsas:

    (a) Se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$, então $||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{v}||$.
    (b) Se $||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{v}||$, então $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$.
    (c) Se $\overrightarrow{u} // \overrightarrow{v}$, então $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$.
    (d) Se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$, então $\overrightarrow{u} // \overrightarrow{v}$.
    (e) Se $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, então $||\overrightarrow{w}|| = ||\overrightarrow{u}|| + ||\overrightarrow{v}||$.
    (f) Os vetores $3\overrightarrow{v}$ e $-4\overrightarrow{v}$ são paralelos e de mesmo sentido.

11. Dados os pontos $A(-1,2)$; $B(3,-1)$ e $C(-2,4)$, determine o ponto D de modo que $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$.

12. Dado o vetor $\overrightarrow{v} = (-2,1)$, achar o vetor paralelo a $\overrightarrow{v}$ que tenha:

    (a) o mesmo sentido que $\overrightarrow{v}$ e 3 vezes o módulo de $\overrightarrow{v}$.
    (b) o sentido contrário de $\overrightarrow{v}$ e metade do módulo de $\overrightarrow{v}$.

13. Determine x para que se tenha $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, sendo $A(x,1)$, $B(4,x+3)$, $C(x,x+2)$ e $D(2x,x+6)$.

14. Dados $A(2,y)$ e $B(3,3)$, determine y para que o módulo do vetor $\overrightarrow{AB}$ seja $\sqrt{5}$.

15. Sejam $A(x_1,y_1)$ e $B(x_2,y_2)$ pomntos do plano. Demonstre que $d(A,B) = ||\overrightarrow{AB}||$.

16. Dados os pontos $A(2,3)$ e $B(5,4)$, determine um ponto C tal que $\overrightarrow{AC}$ seja paralelo ao vetor $\overrightarrow{u} = (2,1)$ e $||\overrightarrow{AC}|| = ||\overrightarrow{AB}||$.

17. Sejam $\overrightarrow{u} = (x_1,y_1)$ e $\overrightarrow{v} = (x_2,y_2)$. Demonstre que

$$||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}||^2 = 2 \cdot \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v},$$

    onde $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ denota o número $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$.

18. Determine um vetor unitário de mesma direção e sentido oposto ao vetor $\overrightarrow{u} = (3,-1)$.

19. Dados os vetores $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$, determine $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, $2\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v}$ e $||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}||$.

20. Dados os vetores $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ e $\overrightarrow{v} = -2\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$, ache o vetor unitário tendo a mesma direção que $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$.

21. Se $\overrightarrow{u} = 5\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{v} = -4\overrightarrow{i} + 3 \rightarrow j$ e $\overrightarrow{w} = -6\overrightarrow{i} + 8\overrightarrow{j}$, ache os escalares h e k tais que $\overrightarrow{v} = h \cdot \overrightarrow{w} - k \cdot \overrightarrow{u}$.

22. Expresse o vetor $\overrightarrow{u} = (6,-2)$ como uma combinação linear dos vetores $\overrightarrow{v} = (1,1)$ e $\overrightarrow{w} = (1,-1)$.

23. Encontre o produto escalar $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ em cada caso:

    (a) $\overrightarrow{u} = (-1,2)$ e $\overrightarrow{v} = (-4,3)$. (b) $\overrightarrow{u} = (3,5)$ e $\overrightarrow{v} = (2,-3)$.
    (c) $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ e $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j}$. (d) $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ e $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{i}$.

24. Mostre que $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} = 1$, $\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} = 1$ e $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = 0$.

25. Determine o cosseno do ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{u} = (4, 3)$ e $\overrightarrow{v} = (1, -1)$.

26. Dados $\overrightarrow{u} = 5\overrightarrow{i} - k\overrightarrow{j}$ e $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j}$, determine o valor do escalar k para que $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ sejam:

    (a) paralelos,

    (b) ortogonais.

27. Sendo $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ dois vetores no plano, prove que

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}.$$

28. Sejam $\overrightarrow{u} = (2, 4)$ e $\overrightarrow{v} = (-3, 5)$. Determine:

    (a) o produto escalar entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$,

    (b) o ângulo entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$,

    (c) a projeção do vetor $\overrightarrow{u}$ sobre o vetor $\overrightarrow{v}$.

29. Considere o triângulo ABC com vértices em $A(3, 3)$, $B(0, 1)$ e $C(1, 6)$.

    (a) Verifique que este retângulo é reto em A.

    (b) Calcule a projeção do cateto AB sobre a hipotenusa BC.

    (c) Determine o pé da altura do triângulo relativo ao vértice A.

30. Calcule o ângulo entre $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$, sabendo que $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{3}$, $||\overrightarrow{v}|| = 1$ e que o ângulo entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é de 30^o.

31. Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores não-nulos. Mostre que $\overrightarrow{u}$ é perpendicular a $\overrightarrow{v} - P_{\frac{\overrightarrow{v}}{\overrightarrow{u}}}$.