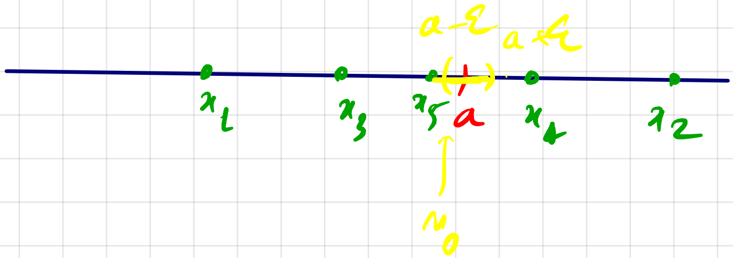
Definimos o conceito de sequência numérica na aula anterior.

$$(x_n) = (x_1, x_2, x_3, \dots) \quad ; \quad x_i \in \mathbb{R}, \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Definimos o conceito de limite de sequência:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \in \mathbb{R} \overset{\text{def.}}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq n_0$$

$$\Rightarrow \underbrace{|x_n - a| < \varepsilon}.$$



$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$$

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$

$$\forall n \geq n_0$$

Vimos também que, se uma seq. (x_n) é convergente, então (x_n) é limitada.

Vimos que a recíproca desse resultado, em geral, é falsa. EX: $x_n = (-1)^n$ é limitada, mas

$$\nexists \lim_{n \to \infty} x_n$$

$$((-1)^n) = (-1, 1, -1, 1, -1, \dots)$$

No entanto, se, além de limitada a sequência for também monótona, mostraremos que será convergente.

Def.: Seja $(x_n) \subset \mathbb{R}$ uma sequência.

(i) Dizemos que (x_n) é crescente se, e só se,

$$x_n \leq x_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Dizemos que (x_n) é decrescente se, e só se,

$$x_n \geq x_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se valerem as desigualdades estritas, então diremos que a seq. (x_n) é estritamente crescente (no caso (i)) e estritamente decrescente (no caso (ii)).

Def.: Dizemos que uma sequência (x_n) é MONÓTONA se ela for crescente ou decrescente (estritamente ou não).

PROP.: Toda sequência monótona e limitada é convergente.

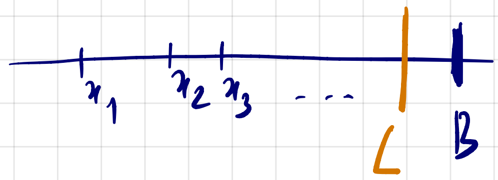
DEMONSTR.: Seja (x_n) uma sequência monótona e limitada.

Sem perda de generalidade, assuma que (x_n) seja crescente. Então, $x_n \leq x_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Seja $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ o conj. de todos os termos da seq. (x_n).

Como (x_n) é limitada superiormente, então $\exists\, B \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq B, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Ou seja, B é uma cota superior para o conj. X dos termos da seq. (x_n).



Seja $L \in \mathbb{R}$ a menor das cotas superiores do conj. X, denotada por SUPREMO DO CONJ. X, i.e., $L = \sup X$.

(tal menor cota superior existe, pois $\mathbb{R}$ é completo(*))

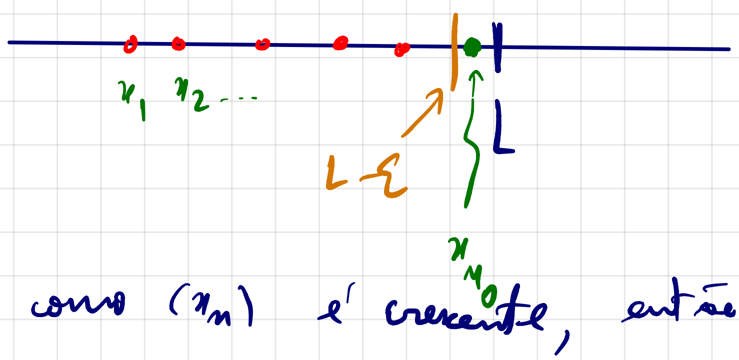
Então, $x_n \leq L$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad (L := \sup X)$

<u>AF.:</u> $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = L$.

Dado $\varepsilon > 0$. Precisamos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que,

$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon.$$

Como $L = \sup X$, i.e., L é a menor cota superior para o conj. X, segue que $L - \varepsilon < L$ não serve como cota superior para o conj. X, ou seja, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\underline{L - \varepsilon < x_{n_0} \leq L}$. (I)



Além disso, como (x_n) é crescente, então

$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n \geq x_{n_0}$$

(*) isto será estudado em ANÁLISE REAL.

Logo,

$$L - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq \sup X = L < L + \varepsilon \ ;$$

por (I)

ou seja, $L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$; i.e.;

$$-\varepsilon < x_n - L < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0$$

$$\Longrightarrow \quad |x_n - L| < \varepsilon \ , \ \forall n \geq n_0$$

Ou seja, mostramos que, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon$, i.e., vale a AF; o que prova a proposição.

$\square$

EXEMPLO: LISTA 01.

15-(b). Vamos mostrar que a seq. (x_n) dada por $x_n = \dfrac{2^n}{1+2^n}$ é convergente.

Para isto, vamos aplicar a proposição acima, ou seja, mostrar que (x_n) é monótona e limitada.

AF. 01: (x_n) é monótona.

De fato, note que: (observe que $x_n > 0$, $\forall n$)

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1}}{1+2^{n+1}} \times \frac{1+2^n}{2^n} = \frac{\cancel{2^n} \cdot 2 \cdot (1+2^n)}{(1+2^n \cdot 2) \cdot \cancel{2^n}}$$

$$= \frac{2 + 2^{n+1}}{1 + 2^{n+1}} = \frac{1 + 1 + 2^{n+1}}{1 + 2^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{1+2^{n+1}} + \frac{\cancel{1+2^{n+1}}}{\cancel{1+2^{n+1}}} = 1 + \underbrace{\frac{1}{1+2^{n+1}}}_{>0} > 1.$$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} > x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, (x_n) é crescente, i.e., MONÓTONA

[Obs.: Poderíamos pensar em avaliar a diferença:

$x_{n+1} - x_n \ldots \leq 0$ ou ≥ 0]

AF.02: (x_n) é limitada (basta mostrar que é limitada superiormente, pois vimos na AF 01 que (x_n) é cresc.)

$$x_n = \frac{2^n}{1+2^n}$$

Note que $2^n < 2^n + 1$

$$\Rightarrow \frac{2^n}{2^n+1} < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

i.e., $x_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, (x_n) é limitada. (superiormente)

Então, vale a AF.02.

Pelas AF. 01 e 02 ((x_n) monótona e limitada), segue por proposição que (x_n) é convergente.

$\square$

PROPOSIÇÃO: (PROPRIEDADES ARITMÉTICAS DOS LIMITES DE SEQUÊNCIAS)

Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências tais que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = b$. Então:

(i) $\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = a - b$

(iii) $\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$.

(iv) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, se $b \neq 0$.

DEMONSTR.: Provaremos o item (i).

Dado $\varepsilon > 0$.

Como $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, então, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (*)$$

Como $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, então $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\forall n \geq n_1 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (**)$$

Tome $\tilde{n} = \max\{n_0, n_1\} \in \mathbb{N}$.

Assim, $\forall n \geq \tilde{n}$, valem $(*)$ e $(**)$. Disso, segue que:

$$|(x_n+y_n)-(a+b)| = |(x_n-a)+(y_n-b)| \leq$$

DESIGUALDADE TRIANGULAR

$|p+q| \leq |p|+|q|$

$$\leq \underbrace{|x_n-a|}_{<\frac{\varepsilon}{2} \text{ (por } (*))} + \underbrace{|y_n-b|}_{<\frac{\varepsilon}{2} \text{ (por } (**))} < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall n > \tilde{n}$$

Ou seja, mostramos que $x_n+y_n \longrightarrow a+b$.

$\square$