28/06/23 – AULA 05

Vimos o início de estudo de séries numéricas. Mostramos que a série harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

é divergente.

SÉRIE GEOMÉTRICA: É a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$, com $a \neq 0$ chama-se SÉRIE GEOMÉTRICA.

Seja (s_n) a seq. das somas parciais da série, ou seja,

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$= a^0 + a^1 + a^2 + \cdots + a^n$$

$$= 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n$$

(soma de uma P.G. com $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a^n$, com $n+1$ TERMOS e razão $q = a$)

Vamos determinar uma fórmula para s_n.

$$-\begin{cases} s_n = 1 + \cancel{a} + \cancel{a^2} + \cancel{\cdots} + \cancel{a^n} & \times(a) \\ a \cdot s_n = \cancel{a} + \cancel{a^2} + \cancel{a^3} + \cancel{\cdots} + a^{n+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow s_n - a.s_n = 1 - a^{n+1}$$

$$s_n(1-a) = 1-a^{n+1}$$

$$\Rightarrow s_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a} - \frac{a^{n+1}}{1-a}$$

Assim:

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-a} - \frac{a^{n+1}}{1-a} = \begin{cases} \infty, & \text{se } a>1 \text{ ou } a<-1 \\ \nexists, & \text{se } a=1 \\ \frac{1}{1-a}, & \text{se } |a|<1. \end{cases}$$

Conclusão: a série geométrica $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ converge se $|a|<1$ e diverge se $|a|\geq 1$.

EX.: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ converge ou diverge?

Note que $a_n = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

que é uma série geométrica convergente, pois $a = \frac{1}{2} < 1$.

PROPOSIÇÃO: Seja $\sum a_n$ uma série numérica. Então, esta série é convergente se, e somente se, a seq. das somas parciais for limitada superiormente.

DEMONSTR.: Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos. Seja $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ a seq. de somas parciais da série.

($\Rightarrow$) Suponha que a série $\sum a_n$ seja convergente. Logo, segue que

$$\exists \; s = \lim_{n \to \infty} s_n .$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, segue que $\exists \; n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow |s - s_n| < \varepsilon$.

Então, $\quad -\varepsilon < s_n - s < \varepsilon \quad , \quad \forall n \geq n_0$,

ou seja, $\quad s - \varepsilon < \underbrace{s_n < s + \varepsilon}_{} \quad , \quad \forall n \geq n_0 \qquad (*)$

Seja $X = \{ s + \varepsilon, s_1, s_2, \dots, s_{n_0 - 1} \}$, com n_0 termos, ou seja, X é finito.

Sendo X finito, segue que

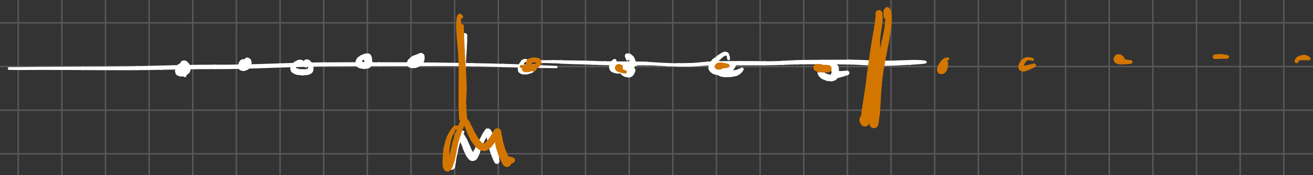
$$\exists \; K = \max X . \qquad (**)$$

De $(*)$ e $(**)$ segue que $\quad s_n \leq K, \; \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, mostramos que a seq. (s_n) é limitada superiormente.

($\Leftarrow$) Suponha que a seq. (s_n) das somas parciais não seja limitada superiormente. Então, $\forall M > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$s_n > M, \quad \forall n \geq n_0.$$

$\lim_{n \to \infty} s_n = +\infty$



Logo, a série $\sum a_n = \lim_{n \to \infty} s_n$ diverge. $\square$

TESTES DE CONVERGÊNCIA.

TEOREMA: (TESTE DA COMPARAÇÃO) Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ duas séries de termos positivos. Então:

(i) Se $a_n \leq b_n, \forall n \geq n_0$ e $\sum b_n$ converge, então a série $\sum a_n$ também converge.

(ii) Se $a_n \leq b_n, \forall n \geq n_0$ e $\sum a_n$ diverge, então a série $\sum b_n$ diverge.

DEMONSTRAÇÃO: Provaremos o item (i)

Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos positivos, tais que $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Sejam (A_n) e (B_n) as respectivas sequências das somas parciais das séries, ou seja;

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{e} \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Suponha também que $\sum b_n$ seja convergente. Então, pela proposição anterior, segue que a seq. (B_n) das suas somas parciais fica limitada superiormente, i.e., $\exists L > 0$ tal que

$$B_n \leq L, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como por hipótese $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, somando para n de 1 até k, teremos:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k = B_n \leq L$$

Ou seja, $A_n \leq L$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Isto é, temos que a sequência (A_n) das somas parciais da série $\sum a_n$ fica limitada superiormente. Como $\sum a_n$ é de termos positivos, por hipótese, segue que (A_n) será crescente, i.e., monótona.

Sendo, então (A_n) monótona $\underline{\underline{e}}$ limitada, segue de um resultado de sequências que (A_n) é convergente, i.e., $\sum a_n$ é convergente.

$\square$

<u>EX:</u> $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n}{3n-1}$ converge ou diverge?

<u>SOLUÇÃO:</u> Note que $3n-1 < 3n, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \frac{1}{3n-1} > \frac{1}{3n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

multiplicando por $3n > 0$, vem:

$$\frac{3n}{3n-1} > \frac{\cancel{3n}}{\cancel{3n}}$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{3n}{3n-1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 1 = 1+1+1+\dots$ é divergente, segue pelo teste da comparação que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n}{3n-1}$ também é divergente.

Obs.: Neste exemplo, ainda poderia ser resolvido observando que; sendo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n}{3n-1}$,

então $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{3n-1} = 1 \neq 0$.

Logo, a série dada é divergente, pois o termo geral a_n não converge para zero.

TEOREMA: (TESTE DA COMPARAÇÃO DO LIMITE)

Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ duas séries de termos positivos. Se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0,$$

então ambas as séries convergem ou divergem.

DEMONSTRAÇÃO: Suponha que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0$

$$\Rightarrow \left| \frac{a_n}{b_n} - c \right| < \varepsilon,$$ ou seja,

$$-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - c < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0$$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{b_n} < c+\varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

$$\Rightarrow a_n < (c+\varepsilon).b_n, \quad \forall n \geq n_0$$

Assim, pelo teste da comparação provado anteriormente, segue que convergência de $\sum b_n$ implica na convergência de $\sum a_n$ e divergência de $\sum a_n$ implica na divergência de $\sum b_n$.

$\square$

EX.: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{3^n+1}$ converge ou diverge?

SOLUÇÃO: Seja $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{3^n+1} = \sum a_n$ e

tome $\displaystyle\sum b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ [SÉRIE GEOMÉTRICA CONVERGENTE, POIS $q = \frac{2}{3} < 1$]

Assim:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n}{3^n+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{2^n}}{3^n+1} \times \frac{3^n}{\cancel{2^n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{3^n}{3^n+1}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{3^n+1-1}{3^n+1} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\cancel{3^n+1}}{\cancel{3^n+1}} - \frac{1}{3^n+1} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \underbrace{\frac{1}{3^n+1}}_{\to 0} \right) = 1 > 0$$

Logo, ambas convergem, pelo teste de comparação do limite, visto que comparamos a série dada com uma série convergente.

<u>Obs.:</u> Será que concluiríamos usando outro teste?

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{3^n+1}.$$

Note que $3^n+1 > 3^n$, $\forall n$.

$$\Rightarrow \frac{1}{3^n+1} < \frac{1}{3^n}, \quad \forall n.$$

$$\times 2^n: \quad \frac{2^n}{3^n+1} < \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

TERMO GERAL DE UMA SÉRIE GEOMÉTRICA CONVERG

Como $\frac{2^n}{3^n+1} < \left(\frac{2}{3}\right)^n$, $\forall n$, e a série $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n$ é convergente, segue pelo teste de comparação que $\sum \frac{2^n}{3^n+1}$ também converge.

EXERCÍCIO, LISTA 02

3. O grande matemático suíço Leonhard Euler chegou, algumas vezes, a conclusões erradas em seu pioneiro trabalho sobre séries infinitas. Por exemplo, Euler "deduziu" que

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

e

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$$

substituindo $x = -1$ e $x = 2$ na fórmula

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

$-1 =$ $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$

Qual foi o problema ocorrido no raciocínio de Euler?

SOLUÇÃO:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

SÉRIE GEOMÉTRICA.

Como tal soma é uma série geométrica, sabemos que a mesma converge se, e só se,

$|x| < 1$, i.e., se e só se, $-1 < x < 1$.

Portanto, para quaisquer outros valores de x fora do intervalo aberto $(-1, 1)$, a série será divergente. Por exemplo, para $x = -1$ e $x = 2$.