23/06/23

CAPÍTULO II – SÉRIES NUMÉRICAS

Queremos dar sentido para somas do tipo

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots,$$

com $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Def.: Chama-se <u>série</u> a soma infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

Neste caso, na notação acima, a_n chama-se termo geral da série.

Associamos uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a uma sequência (s_n) de <u>somas parciais</u>, como segue:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow \quad (s_n) = (s_1, s_2, s_3, \dots), \quad \text{onde}$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Como toda série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pode ser pensada como uma sequência (s_n) de somas parciais, podemos, c.f. estudado em sequências, investigar se haverá convergência ou divergência dessa sequência (s_n). Ou seja, definimos:

<u>Def.</u>: Dizemos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é <u>CONVERGENTE</u> se a sequência (s_n) das somas parciais for convergente, e <u>DIVERGENTE</u> em caso contrário.

Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ for convergente, então

$$\exists\ S \in \mathbb{R} \text{ tal que } S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

i.e., $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow |s_n - S| < \varepsilon$.

Salvo em casos muito simples, em geral não é possível obter a soma de uma série (caso convergente). No entanto, via técnicas/testes que iremos estudar, poderemos concluir se converge ou diverge.

<u>Ex.</u>: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge ou diverge?

Se converge, podemos obter sua soma?

<u>SOLUÇÃO</u>: Note que podemos escrever:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$$

$$= \frac{A(n+1) + B.n}{n(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = A(n+1) + Bn$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \quad B = -A \quad \boxed{B = -1}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$ (termo geral da série)

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \underbrace{1 - \cancel{\frac{1}{2}}}_{k=1} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}}_{k=2} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}}_{k=3} + \cdots + \underbrace{\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}}_{k=n}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow s_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\to 0} \right) = 1.$$

CONCLUSÃO: A série $\sum_{n\geq 1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ é convergente, e converge para 1.

PROPOSIÇÃO: (PROPRIEDADES ARITMÉTICAS)

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries convergentes.

Então:

(a) $$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

(b) $$\sum_{n=1}^{+\infty} k \cdot a_n = k \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

DEMONSTR.: Vamos mostrar que
$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Sejam (A_n) e (B_n) as sequências das somas parciais de $\sum a_n$ e $\sum b_n$, respectivamente.

$$\left[A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \; ; \; B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n \right]$$

Como $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são convergentes então $\exists A, B \in \mathbb{R}$ tais que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ e $\lim_{n\to\infty} B_n = B$.

Dado $\varepsilon > 0$.

Como $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, segue que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,
$$\forall n \geq n_0 \implies |A_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (*)$$

Como $\lim_{n\to\infty} B_n = B$, segue que $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que,
$$\forall n \geq n_1 \implies |B_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (**)$$

Tome $\tilde{n} = \max\{n_0, n_1\} \in \mathbb{N}$. Assim, $\forall n \geq \tilde{n}$, valem $(*)$ e $(**)$. Disso, segue que

$$|A_n + B_n - (A+B)| = |(A_n - A) + (B_n - B)| \leq$$

DESIGUALDADE TRIANGULAR

$$\leq \underbrace{|A_n - A|}_{\substack{< \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{por } (*)}} + \underbrace{|B_n - B|}_{\substack{< \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{por } (**)}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ou seja, mostramos que

$$A_n + B_n \longrightarrow A + B$$

i.e.,
$$\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \longrightarrow A + B$$
$$\parallel$$
$$\sum_{k=1}^{n} a_k + b_k \longrightarrow A + B$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n .$$

$\square$

<u>Obs.</u>: Se alguma das séries diverge, o resultado é falso. EX: Sejam as séries:

- $\sum a_n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$

Neste caso: $s_1 = 1$
$s_2 = 0$
$s_3 = 1$
$s_4 = 0$ $(\ldots)$

$$\Rightarrow \sum a_n \text{ diverge.}$$

- $\sum b_n = 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$

$$\Rightarrow \sum b_n \text{ diverge.}$$

- $\sum c_n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$

$$\sum c_n \text{ diverge.}$$

Então $\sum (a_n + b_n) = \sum x_n$, onde

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_1 + b_1 = 1 + 1 = 2 \\ x_2 &= a_2 + b_2 = -1 + 1 = 0 \\ x_3 &= a_3 + b_3 = 1 + 1 = 2 \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \Rightarrow (s_n) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, \ldots),$$

$$= (2, 2, 4, 4, 8, \ldots),$$

QUE DIVERGE.

Mas: $\sum (a_n + c_n) = \sum y_n$, onde

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_1 + c_1 = 1 - 1 = 0 \\ y_2 &= a_2 + c_2 = -1 + 1 = 0 \\ y_3 &= a_3 + c_3 = 1 - 1 = 0 \\ &\vdots \end{aligned}\right\} (s_n) = (y_1, y_1 + y_2, y_1 + y_2 + y_3, \ldots)$$

$$(0, 0, 0, 0, \ldots),$$

QUE CONVERGE.

PROPOSIÇÃO: Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for convergente, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

DEMONSTR.: Seja $\sum a_n$ uma série convergente.

Logo, dada (s_n) a sua seq. de somas parciais, segue que $\exists\ s = \lim_{n\to\infty} s_n$.

$s_1 = a_1$
$s_2 = a_1 + a_2$
$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$
$\vdots$

$s_3 - \underbrace{(a_1 + a_2)}_{s_2} = a_3$

Como $a_n = s_n - s_{n-1}$

Tomando o limite com $n \to \infty$, obtemos:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \underbrace{\lim_{n\to\infty} s_n}_{\to s} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} s_{n-1}}_{\to s} = s - s = 0$$

$\square$

Obs.: O interessante desse resultado é a contraposição do mesmo; ou seja, se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, então a série diverge.

Pois o fato de $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ não implica da série $\sum a_n$ ser convergente.

EX.: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ (SÉRIE HARMÔNICA)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

Note que $a_n = \frac{1}{n} \to 0$, no entanto, mostraremos que esta série diverge. Vejamos:

Observe que

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\uparrow\ \text{POT. DE 2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{\uparrow\ \text{POT. DE 2}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\dots+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}}_{\uparrow\ \text{POT. DE 2}}+\cdots$$

e defina (s_{2^k}) a seq. de somas parciais

$$s_2 = 1+\frac{1}{2}, \quad s_4 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$$

Note que:

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\dots+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}}+\cdots >$$

$3 < 4$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$

$5, 6, 7 < 8$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7} > \frac{1}{8}$

$9, 10, \dots, 15 < 16$ $\frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \dots \frac{1}{15} > \frac{1}{16}$

$$> 1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}+\underbrace{\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{16}}_{8\ \text{ADITIVOS}}+\cdots$$

$$= \underbrace{\underbrace{1+\frac{1}{2}}_{k=1}+\frac{1}{2}}_{k=2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots = 1+(k-1)\cdot\frac{1}{2}$$

$$s_{2^k} = 1+(k-1)\cdot\frac{1}{2} \longrightarrow +\infty$$

conclusão:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots \to +\infty,$$

ou seja, a série harmônica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$,

embora $a_n = \frac{1}{n} \to 0$, é divergente.