21/06/23 - AULA 03

## DINÂMICA DAS CONVERGÊNCIAS:

Seja $(x_n)$ uma sequência definida recursivamente, ou seja, um termo qualquer da sequência é obtido a partir do anterior. Vamos investigar a dinâmica da convergência.

EX.: $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}} = ?$

Existe uma forma simples de resolver esse exemplo (*), mas vamos investigar no contexto do estudo de sequências.

Considere a sequência $(x_n)$ definida recursivamente por:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}, & \forall n \geq 1. \end{cases}$$

ASSIM, POR EXEMPLO, $n=1$: $x_2 = \sqrt{2+x_1} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$

$n=2$: $x_3 = \sqrt{2+x_2} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

$\vdots$

Queremos mostrar que $(x_n)$ acima definida é convergente, e obter o seu limite. Por exemplo, se mostrarmos que $(x_n)$ é monótona e limitada, teremos que a mesma será convergente.

---

(*) Basta escrever $x = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$

$$\Rightarrow x^2 = 2 + \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}_{=x} \iff x^2 = 2+x$$

e tomamos como $x$ a raiz positiva.

Defina $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \sqrt{2+x} = (2+x)^{\frac{1}{2}}$$

Como $f'(x) = \frac{1}{2}(2+x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{2+x}} > 0$, $\forall x \in [0, +\infty)$,

segue que $f$ acima definida [e na qual foi inspirada da def. recursiva da sequência dada] é crescente(*).

AF-01 $(x_n)$ é MONÓTONA: (De fato, mostraremos que esta sequência é crescente).

De fato, basta mostrar que $\boxed{x_n \leq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}}$.
E isto é feito por indução sobre $n$.

(i) BASE DA INDUÇÃO:

$$x_1 = \sqrt{2} \leq \sqrt{2+\sqrt{2}} = x_2$$

$\Rightarrow x_1 \leq x_2$. Logo, vale a base da indução.

(ii) Suponha a desigualdade verdadeira para um certo $n = k$, ou seja, que

$$x_k \leq x_{k+1}.$$ (Hipótese da indução)

Precisamos mostrar que vale para $n = k+1$; ou seja, precisamos mostrar que

$$x_{k+1} \leq x_{k+2}$$

Como a $f$ acima definida é crescente, segue que:

---

(*) $f(x) = \sqrt{2+x}$

$f(x_1) = \sqrt{2+x_1} = x_2$

$f(x_2) = \sqrt{2+x_2} = x_3$

$\ldots$ $f(x_n) = x_{n+1}$ ; ----

$$x_k \le x_{k+1} \underset{\text{Pois } f \text{ É CRESCENTE}}{\Longrightarrow} \underbrace{f(x_k)}_{\shortparallel\; x_{k+1}} \le \underbrace{f(x_{k+1})}_{\shortparallel\; x_{k+2}} \Longrightarrow x_{k+1} \le x_{k+2}$$

Logo, vale (ii).

Assim, de (i) e (ii) segue a AF.01 por indução, ou seja, a seq. $(x_n)$ é monótona (crescente)

AF.02 $f$ é limitada (superiormente)

De fato, vamos mostrar que $x_n \le 2, \forall n \in \mathbb{N}$.

A prova é feita por indução sobre $n$.

(i) $n=1$:

$x_1 = \sqrt{2} \le 2$ (ok!). Logo, vale a base da indução.

(ii) Suponha que a AF. seja verdadeira para um certo $n=k$, ou seja, que vale

$$x_k \le 2 \qquad \text{(HIPÓTESE DA INDUÇÃO)}$$

Precisamos mostrar que vale para $n=k+1$, ou seja, mostrar que

$$x_{k+1} \le 2. \qquad \text{(TESE DA INDUÇÃO)}$$

Como $f$ é crescente,

$$x_k \le 2 \underset{\text{Pois } f \text{ É CRESCENTE}}{\Longrightarrow} \overbrace{f(x_k)}^{=x_{k+1}} \le \underbrace{f(2)}_{=\sqrt{2+2}=2} \Longrightarrow x_{k+1} \le 2.$$

Logo, vale (ii).

Assim, pelos itens (i) e (ii) segue a AF.02 por indução; i.e.; $(x_n)$ é limitada.

Portanto, sendo $(x_n)$ monótona (pela AF. 01) e sendo também limitada (AF. 02), segue por proposição que $(x_n)$ é convergente.

Logo, $\exists\ L = \lim_{n\to\infty} x_n$.

$$x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$$

$$L \qquad \sqrt{2+L}$$

$$\Rightarrow \quad L = \sqrt{2+L} \iff L^2 = 2+L$$

$$L^2 - L - 2 = 0$$

$$L = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2\cdot 1}$$

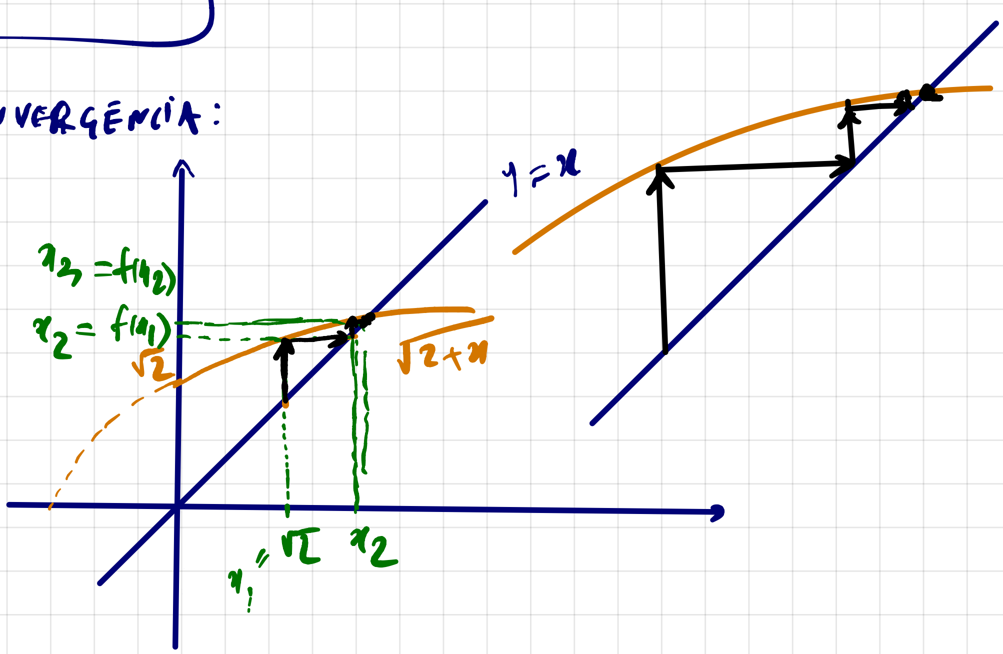
$$L = \frac{1 \pm 3}{2} \quad \begin{cases} L = \frac{4}{2} = 2 \\ \cancel{L = \frac{-2}{2}} = -1 \end{cases}$$

DESCARTAMOS POIS SABEMOS QUE TODOS OS TERMOS DA SEQ. $(x_n)$ SÃO POSITIVOS.

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = 2.}$$

DINÂMICA DA CONVERGÊNCIA:

$f(x) = \sqrt{2+x}$



A dinâmica acima ocorre pois $f$ é crescente.
Se $f$ for decrescente, vamos encontrar duas subsequências
cada uma convergindo para o limite (se existir).