AULA 02, 16/06

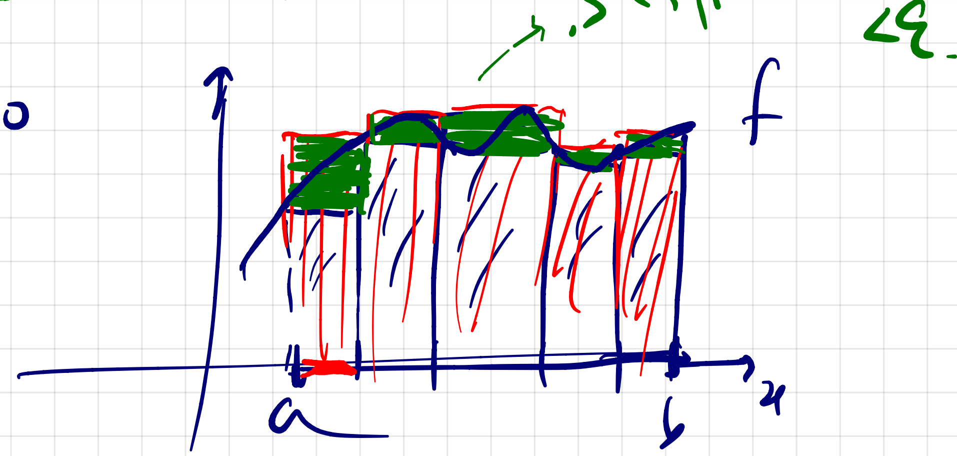
No final da aula passada, enunciamos:

PROP.: $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ limitada no bloco A é integrável em A se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P$ - partição de A tal que

$$S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon.$$

ILUSTRAÇÃO NO CASO

$f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



Obs.: Lembre-se de que

f é integrável num bloco $A \subset \mathbb{R}^m$

$\Updownarrow$

$$\underline{\int_A} f = \overline{\int_A} f.$$

DEMONSTR. DA PROPOSIÇÃO:

($\Rightarrow$) Suponha que $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é integrável no bloco $A \subset \mathbb{R}^m$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, $\exists P_1, P_2$ partições do bloco A tais que

$$S(f;P_1) - s(f;P_2) < \varepsilon.$$

Tome $P = P_1 + P_2$ um refinamento para P_1 e para P_2, i.e.; $P_1 \subset P$ e $P_2 \subset P$. Assim, por uma proposição da aula passada,

$$s(f;P_1) \leq s(f;P) \quad \text{[A SOMA INFERIOR NÃO DIMINUI]}$$

$$\Big\downarrow \times(-1)$$

$$-s(f;P) \leq -s(f;P_1)$$

e

$$S(f;P) \leq S(f;P_2) \quad \text{[A SOMA SUPERIOR NÃO AUMENTA]}$$

Com isso:

$$S(f;P) - s(f;P) \leq S(f;P_2) - s(f;P_1) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon.$$

($\Leftarrow$): Reciprocamente, suponha que, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P$ partição de $A \subset \mathbb{R}^m$ tal que $S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon$.

Vamos mostrar que $\exists P_1, P_2$ partições de A tais que

$$S(f;P_1) - s(f;P_2) < \varepsilon.$$

De fato, basta tomar $P = P_1 = P_2$.

$\square$

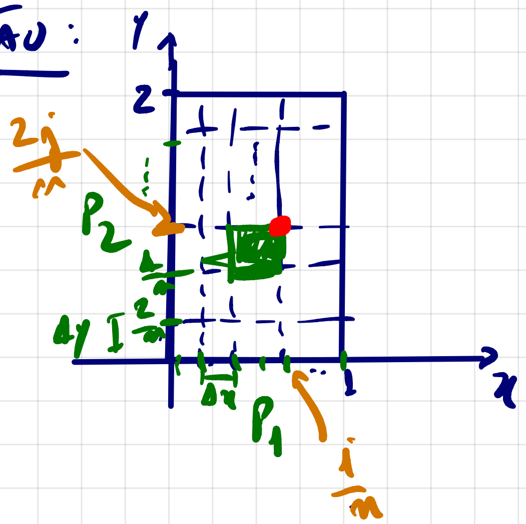
EXEMPLOS DE CÁLCULO:

01) $f: [0,1]\times[0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x + y$.

Obter $\int_A f$, se existir.

$$\boxed{\text{Obs.: No } \mathbb{R}^2, \text{ escrevemos: } \int_A f = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy}$$

Solução:



Seja $P = P_1 \times P_2$ uma partição regular do bloco $[0,1]\times[0,2]$, que divide P_1 e P_2 em n subintervalos de mesmo comprimento em P_1 e de mesmo comprim. em P_2

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n} \\ \Delta y &= \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n} \end{aligned}\right\}$$

determinamos $n \times n = n^2$ subblocos B $\square$ $\Delta y\ \frac{2}{n}$, $\Delta x\ \frac{1}{n}$.

$\forall B \in P$. $\underbrace{Vol(B)} = \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n} = \underbrace{\frac{2}{n^2}}$

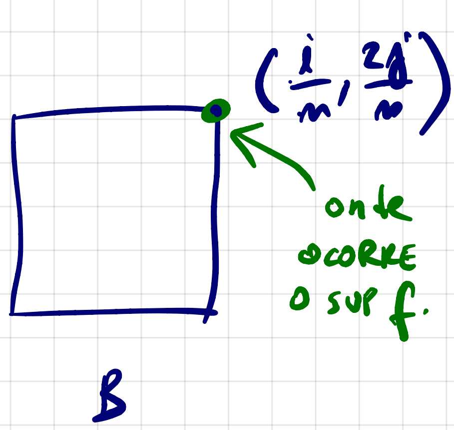
Vamos obter $S(f; P)$.

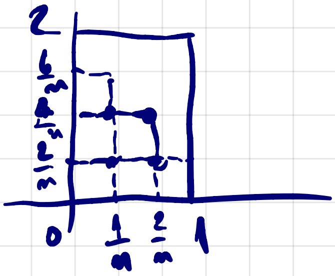
$$\underbrace{S(f;P)} = \sum_{B\in P} M_B \cdot \underbrace{Vol(B)}_{\frac{2}{n^2}} = \underbrace{\sum_{B\in P} M_B \cdot \frac{2}{n^2}}_{(*)};$$

Resta determinar M_B.

$M_B = \sup\{f(x,y) : (x,y)\in B\}$.

Como $f(x,y) = 2x+y$, é crescente, pois esta soma será maior quanto maiores forem x e y.





Assim:

$$\underbrace{M_B}_{} = (2x+y)\Big|_{\substack{x=\frac{i}{n}\\ y=\frac{2j}{n}}} = \underbrace{\frac{2i}{n}+\frac{2j}{n}}_{}$$

Com isso:

$$S(f,P) = \sum_{B\in P} M_B \cdot \frac{2}{n^2} = \sum_{B\in P}\left(\frac{2i}{n}+\frac{2j}{n}\right)\cdot\frac{2}{n^2} =$$

por (*)

$$= \sum_{B\in P}\left(\frac{4i}{n^3}+\frac{4j}{n^3}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{4i}{n^3}+\frac{4j}{n^3}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{4i}{n^3} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{4j}{n^3}$$

$$\frac{4}{n^3}\cdot\sum_{i=1}^{n} i\cdot\underbrace{\sum_{j=1}^{n} 1}_{=n} + \frac{4}{n^3}\cdot\sum_{j=1}^{n} j\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{n} 1}_{n}$$

$$\frac{4}{n^{\cancel{3}}}\cdot\cancel{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} i + \frac{4}{n^{\cancel{3}}}\cdot\cancel{n}\cdot\sum_{j=1}^{n} j$$

$$\frac{4}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n} i + \frac{4}{n^2}\cdot\sum_{j=1}^{n} j$$

$$\boxed{1+2+3+\dots+n = \frac{(1+n)\cdot n}{2}}$$

$$\frac{\cancel{4}}{n^{\cancel{2}}}\cdot\frac{(1+n)\cdot\cancel{n}}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{4}}{n^{\cancel{2}}}\cdot\frac{(1+n)\cancel{n}}{\cancel{2}}$$

$$2\left(\frac{1+n}{n}\right) + 2\cdot\left(\frac{1+n}{n}\right) = 2\left(\frac{1}{n}+1\right) + 2\cdot\left(\frac{1}{n}+1\right)$$

$$= 4\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$S(f;P) = 4\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Ao refinar P, teremos $n\to\infty$, i.e.;

$$\overline{\int_A} f \leq S(f;P), \text{ onde}$$

$$\overline{\int_A} f = \lim_{n\to\infty} S(f;P) = \lim_{n\to\infty} 4\left(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\right) = 4$$

Do mesmo modo se mostra que

$$\underline{\int_A} f = 4$$

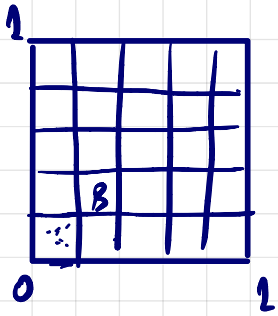
Logo, f é integrável, e $\int_A f = 4$, i.e.;

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = 4.$$

02) $f: \underbrace{[0,1]\times[0,1]}_{A} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x,y \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } y \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

uma variante da função de Dirichlet.



Seja $P = P_1 \times P_2$ partição regular, com

$$\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

$$\Delta y = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}.$$

Então, $\forall B \in P$, $\operatorname{vol}(B) = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$.

Mas,
$$\left.\begin{aligned} M_B &= \sup\{f(x,y) : x,y \in A\} = 1. \\ m_B &= \inf\{f(x,y) : x,y \in A\} = 0 \end{aligned}\right\} \forall B \in P,$$
pela densidade de $\mathbb{Q}$ e de $\mathbb{I}$ em $\mathbb{R}$.

Assim:

$$S(f;P) = \sum_{B \in P} 1 \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{B\in P} 1 = \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\sum_{j=1}^{n} 1}_{=n}$$

$$= \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n} n = \frac{n}{n^2}\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{n} 1}_{=n} = \frac{n^2}{n^2} = 1.$$

$\Rightarrow S(f;P) = 1$, $\forall P$ partição, por força da densidade de $\mathbb{Q}$ e de $\mathbb{I}$ em $\mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \overline{\int_A} f = 1.$$

Mas: $\underline{s(f;P)} = \sum_{B\in P} m_B \cdot vol(B)$

$$= \sum_{B\in P} 0 \cdot \frac{2}{n^2} = \underline{0}$$

$\Rightarrow s(f;P) = 0, \ \forall P$ partição de A.

(devido às densidades de $\mathbb{Q}$ e do $\mathbb{I}$ em $\mathbb{R}$)

Portanto, $\underline{\int}_A f = 0$

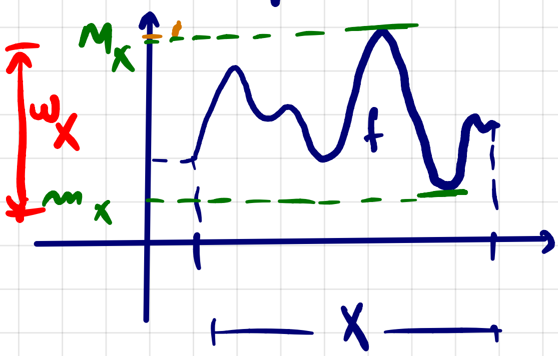
Ou seja, $\underline{\int}_A f = 0 \neq 1 \ \overline{\int}_A f$,

i.e., f não é integrável.

<u>Def.</u>: Seja $X \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto qualquer. Seja $f: X \to \mathbb{R}$ uma função limitada em X. Definimos a <u>OSCILAÇÃO</u> de f no conj. X por

$\omega_X = \omega(f;X) = M_X - m_X$, i.e., a diferença entre o supremo e o ínfimo de f em X.

Ex.: $f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



PROPOSIÇÃO: Seja $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada no bloco $A \subset \mathbb{R}^m$. Então, f é integrável em A se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P$ - partição de A, tal que

$$\sum_{B \in P} \omega_B \cdot Vol(B) < \varepsilon.$$

DEMONSTR.: Basta observar que

$$\omega_B = M_B - m_B \,, \quad \forall B \in P. \,,$$

e disso;

f é integrável $\iff$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P$ partição de A tal que

$$S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon \,,$$

ou seja,

$$\underbrace{\sum_{B \in P} M_B \cdot Vol(B) - \sum_{B \in P} m_B \, Vol(B)}_{} = S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon$$

i.e.,

$$\underbrace{\sum_{B \in P} \omega_B \cdot Vol(B)}_{} = \sum_{B \in P} \underbrace{(M_B - m_B)}_{\omega_B} \cdot Vol(B) < \varepsilon.$$

$\square$