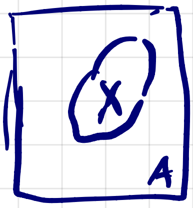
23/06/23

AULA 04

Definimos na aula passada o conceito de conjunto J-mensurável.

X – conj. limitado. $A \subset \mathbb{R}^m$ bloco que contém X.

X é J-mensurável $\Leftrightarrow \xi_X : A \to \mathbb{R}$ for integrável



TEOREMA: O conj. $X \subset \mathbb{R}^m$ (limitado) é J-mensurável $\Leftrightarrow \text{med}(\partial X) = 0$.

DEMONSTR.: Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ um bloco tal que $X \subset A$, X limitado. Então:

$$X \text{ é J-mensurável} \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \xi_X : A \to X \text{ é integrável} \Longleftrightarrow$$

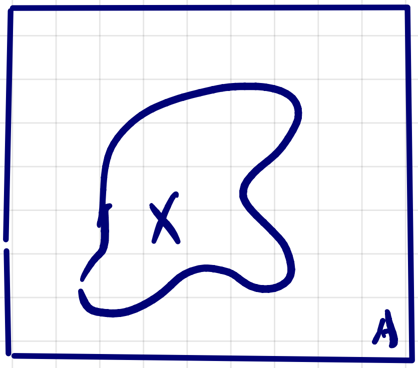
$$\underset{\text{T. DE LEBESGUE}}{\Longleftrightarrow} \text{med}(D_{\xi_X}) = 0 \underset{\text{FATO IMPORTANTE DA AULA PASSADA}}{\Longleftrightarrow} \text{med}(\partial X) = 0$$

□

No que segue vamos definir $\int_X f$ sendo X um conjunto J-mensurável.

Seja $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ função limitada no conj. J-mensurável X.

Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ um bloco tal que $X \subset A$.



Vamos estender f para A do seguinte modo:

$$\tilde{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ pondo}$$

$$\tilde{f}(x) = f(x) \cdot \xi_X(x), \text{ i.e.;}$$

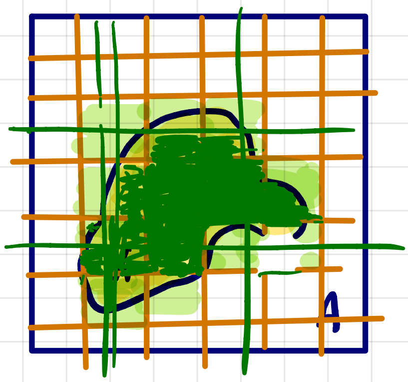
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in X \\ 0, & \text{se } x \in A \setminus X. \end{cases}$$

Assim;

$$\int_A \tilde{f} = \int_A f(x) \cdot \xi_X(x)\, dx = \int_X f(x) \cdot \underbrace{\xi_X(x)}_{\substack{\shortparallel \\ 1}} dx + \int_{A \setminus X} f(x) \cdot \underbrace{\xi_X(x)}_{=0} dx$$

$$= \int_X f(x)\, dx + 0 = \int_X f \quad ; \quad \text{ou seja,}$$

$$\int_X f = \int_A \tilde{f}$$



TEOREM: PROPRIEDADES ARITMÉTICAS DA INTEGRAL

Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funções integráveis no conjunto J-mensurável X. Então, valem as propriedades:

01) $f+g$ é integrável, e

$$\int_X f+g = \int_X f + \int_X g.$$

02) $c \cdot f$ é integrável $(c \in \mathbb{R})$, e

$$\int_X c \cdot f = c \cdot \int_X f.$$

03) Se $f(x) \geq 0$, $\forall x \in X$, então $\int_X f(x)dx \geq 0$.

Além disso, se $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in X$, então

$$\int_X f \geq \int_X g.$$

04) $|f|$ é integrável, e

$$\left| \int_X f \right| \leq \int_X |f|.$$

DEMONSTRAÇÃO:

Mostraremos 01. Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ um bloco tal que $X \subset A$, e considere $\tilde{g}, \tilde{f} : A \to \mathbb{R}$ as extensões: $\tilde{f}(x) = f(x) \cdot \xi_X(x)$; $\tilde{g} = g(x) \cdot \xi_X(x)$

Então:

$$\int_X (f+g) = \int_A \tilde{f} + \tilde{g} \underset{\uparrow}{=} \int_A \tilde{f} + \int_A \tilde{g} = \int_X f + \int_X g$$

RESULTADO DE OUTRO TEOR.

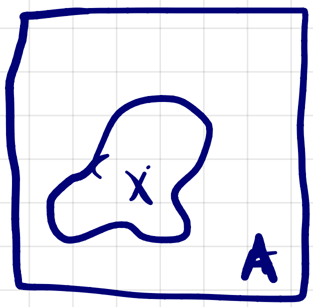
$\square$

TEOREMA: (UPGRADE DO TEOR. DE LEBESGUE)

Seja $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada definida no conjunto J-mensurável X. Então, f é integrável se, e somente se, o conjunto D_f de seus pontos de descontinuidade tiver medida nula.

DEMONSTR.: Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ um bloco que contenha X.

Seja $\tilde{f} : A \to \mathbb{R}$ a extensão de f em A.



Todos os pontos de descontinuidade de f são pontos de descontinuidade de $\tilde{f}$ também. Ou seja, $D_f \subset D_{\tilde{f}}$.

Além disso, as descontinuidades da extensão além de englobar as descontinuidades de f, conterá as descontinuidades definidas pela fronteira de X, ou seja, temos:

$$D_f \subset D_{\tilde{f}} \subset D_f \cup \partial X$$

Como X é $\mathcal{J}$-mensurável, pelo teorema visto no início da aula segue que $med(\partial X) = 0$

$$med(D_f) \leq med(D_{\tilde{f}}) \leq med(D_f) + \underbrace{med(\partial X)}_{=0}$$

Assim, teremos que $med\, D_f = 0 \iff med\, D_{\tilde{f}} = 0$

Como f é integrável $\iff \tilde{f} : \underset{(\text{bloco})}{A} \to X$ integrável

$\Updownarrow$ T. DE LEBESGUE

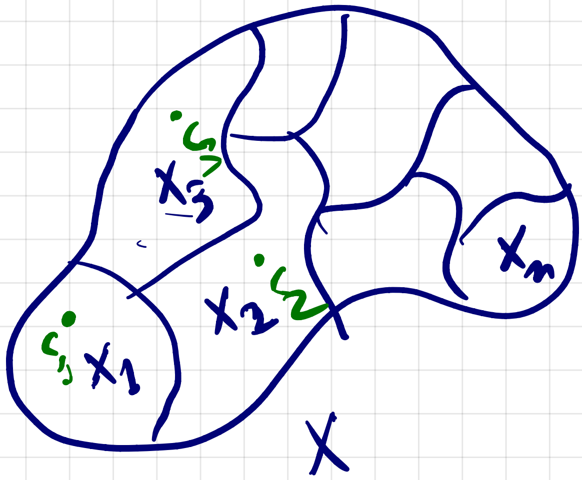
$med(D_{\tilde{f}}) = 0$.

Portanto, $med\, D_f = 0$.

$\square$

INTEGRAL DE RIEMANN:

Seja $f: X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função integrável definida no conj. J-mensurável X.



Seja $D = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ a decomposição do conj. X tal que X_i - J mensurável, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n \quad \text{e}$$

$$\operatorname{int}(X_i \cap X_j) = \emptyset \quad \text{se } i \neq j.$$

Sendo $m_i = \inf\limits_{x \in X_i} f(x)$ e $M_i = \sup\limits_{x \in X_i} f(x)$, definimos as somas inferiores e superiores, respectivamente, por:

$$s(f; D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \operatorname{Vol}(X_i) \quad \text{e}$$

$$S(f; D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \operatorname{Vol}(X_i)$$

Definimos, também, a decomposição pontilhada por

$$D^* = (D, \{f(c_i)\}) \quad , \quad c_i \in X_i \,,\ i = \{1, \dots, n\}$$

A soma de Riemann de f em relação à decomposição pontilhada D^* é definida por

$$\Sigma(f; D^*) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \mathrm{Vol}(X_i)$$

Como $\forall c_i \in X_i$ vale que

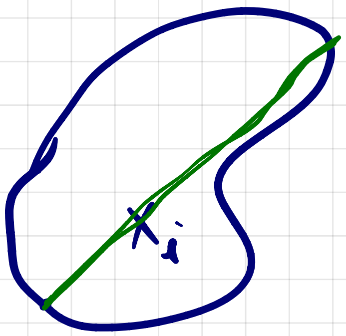
$$m_i \leq f(c_i) \leq M_i \,, \quad \text{temos}$$

$$s(f; D) \leq \Sigma(f; D^*) \leq S(f; D)$$

TEOREMA Se $f : X \to \mathbb{R}$ é integrável no conj. J-mensurável X, então

$$\int_X f(x)\,dx = \lim_{\|D\| \to 0} \Sigma(f; D^*) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \mathrm{Vol}(X_i)$$

Obs.:



$$\|D\| = \sup_{x_i, y_i \in \overline{X_i}} |x_i - y_i|$$

$\|D\|$: MAIOR CORDA NO INTERIOR DE X_i.

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$