21/06/23 – AULA 03

Vimos no final da aula passada o resultado:

$f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ limitada no bloco A. Então,

f é integrável em A $\iff$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ P-partição de A, tal que,

$$\sum_{B \in P} w_B \cdot Vol(B) < \varepsilon.$$

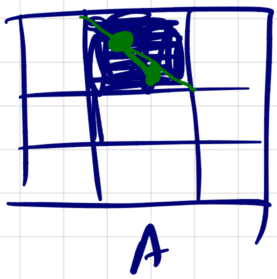
TEOREMA: Seja $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função contínua no bloco A. Então f é integrável em A.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ um bloco e $f: A \to \mathbb{R}$ contínua. Como A é compacto [pois é limitado e fechado], sendo f contínua em A, então f é uniformemente contínua, i.e., $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que, $\forall x, y \in A$:

$$\|x-y\| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{Vol(A)}$$

Seja P uma partição qualquer do bloco A, que o divide em subblocos $B \in P$.

Como, $\forall x, y \in A$, $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{Vol(A)}$ sempre que $\|x-y\| < \delta$, em particular para $\|P\| < \delta$ teremos $\|x-y\| < \delta$



$\|P\| < \delta$

Neste caso, segue que

$$M_B - m_B < \frac{\varepsilon}{Vol(A)}$$

Disso, temos,

$$\sum_{B \in P} w_B \cdot Vol(B) = \sum_{B \in P} \underbrace{(M_B - m_B)}_{< \varepsilon / Vol\, A} \cdot Vol(B) <$$

$$< \sum_{B\in P} \varepsilon \cdot vol(B) = \frac{\varepsilon}{vol(A)} \cdot \underbrace{\sum_{B\in P} vol(B)}_{= vol(A)} = \frac{\varepsilon}{\cancel{vol(A)}} \cdot \cancel{vol}(A) = \varepsilon$$

Ou seja,

$$\sum_{B\in P} \omega_B \cdot vol(B) < \varepsilon, \quad \text{sempre que } \|P\| < \delta.$$

Ou seja, f é integrável no bloco A.

$\square$

PROPOSIÇÃO: PROPRIEDADES ARITMÉTICAS:

Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funções integráveis em um bloco $A \subset \mathbb{R}^m$. Então:

01) $f+g$ é integrável, e $\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g$.

02) $c \cdot f$ é integrável $(c \in \mathbb{R})$, e

$$\int_A c \cdot f = c \cdot \int_A f.$$

03) Se $f(x) \geq 0$, $\forall x \in A$, então $\int_A f(x)dx \geq 0$.

Além disso, se $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in A$, então

$$\int_A f \geq \int_A g.$$

04) $|f|$ é integrável e $\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|$.

<u>DEMONSTR:</u> Provaremos apenas a terceira propriedade.

03) Sendo $f(x) \geq 0$, $\forall x \in A$, então, $\forall P$ - partição do bloco A, temos

$$s(f;P) \geq 0$$

Em particular, para a partição que fornece o supremo das somas inferiores, teremos

$$\underline{\int_A} f = \sup_P s(f;P) \geq 0$$

Como por hipótese f é integrável, concluímos que

$$\underset{\sim}{\int_A f} = \underline{\int_A} f \; \underset{\sim}{\geq 0.} \implies \int_A f \geq 0$$

Além disso, se $\underline{f(x) \geq g(x)}$, $\forall x \in A$, então define $h: A \to \mathbb{R}$ pondo

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

Logo, $h(x) \geq 0$, $\forall x \in A$.

Pela primeira parte acima feita, segue que $\int_A h \geq 0$, ou seja:

$$\int_A (f-g) \geq 0 \iff \int_A f + (-g) \geq 0$$

$$\Leftarrow \quad \int_A f + \int_A -g \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \int_A f - \int_A g \geq 0$$

POR 01

POR 02, com $c = -1$

$$\Longleftrightarrow \int_A f \geq \int_A g.$$

$\square$

Até aqui estudamos integrais de funções limitadas em um bloco $A \subset \mathbb{R}^m$, $f: A \to \mathbb{R}$.

No entanto, precisamos definir integral múltipla para funções $f: X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, com X um conjunto mais geral do que simplesmente um bloco.

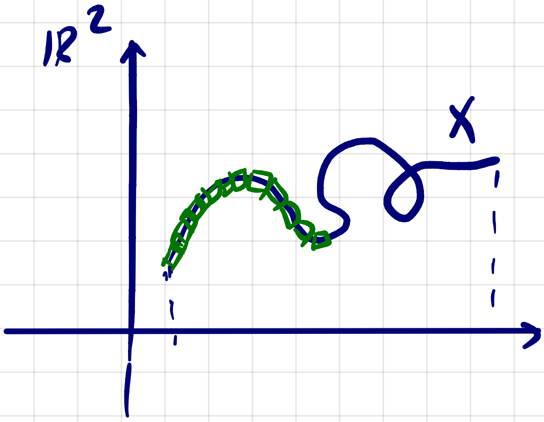
É o que vamos estender no que segue.

CONJUNTOS DE MEDIDA NULA:

Def.: Dizemos que um conj. $X \subset \mathbb{R}^m$ tem medida nula, e escrevemos $med(X) = 0$ se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ uma sequência (C_n) de blocos abertos tais que

$$X \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \quad e \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} vol(C_n) < \varepsilon.$$

EX-1



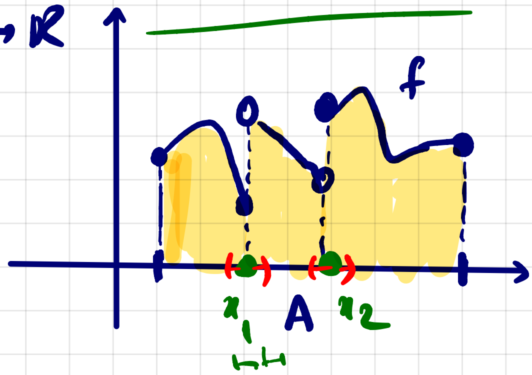
X – curva no $\mathbb{R}^2$

NESTE EXEMPLO DIZER QUE $med(X) = 0$ EQUIVALE A AFIRMAR QUE A "ÁREA" DESSA CURVA NO PLANO SERÁ ZERO.

TEOREMA DE LEBESGUE: Uma função limitada $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definida em um bloco $A \subset \mathbb{R}^m$ é integrável se, e somente se, o conjunto D_f dos seus pontos de descontinuidade tiver medida nula.

A demonstração foge de um curso de cálculo.

Ex: $f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$D_f = \{x_1, x_2\}$

$\boxed{\text{med } D_f = 0}$, pois, $\forall \varepsilon > 0$, seja

$C_1 = B_{\frac{\varepsilon}{10}}(x_1)$ e $C_2\ B_{\frac{\varepsilon}{10}}(x_2)$

NESTE CASO,

$$D_f \subset \bigcup_{n=1}^{2} C_n = C_1 \cup C_2 \quad e$$

$$\sum_{n=1}^{2} \text{Vol } C_n = \text{Vol } C_1 + \text{Vol } C_2$$

$$= 2 \cdot \frac{\varepsilon}{10} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{10} = \frac{4\varepsilon}{10}$$

$$= \frac{2\varepsilon}{5} < \varepsilon.$$

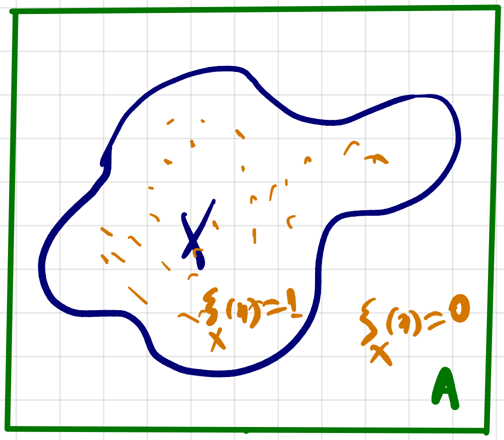
Logo:

Logo, f é integrável.

CONJUNTOS J-MENSURÁVEIS (MENSURÁVEIS SEGUNDO JORDAN)

Seja $X \subset \mathbb{R}^m$ um conj. qualquer, limitado.
Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ um bloco qualquer, tal que $X \subset A$.

Define a função característica $\xi_X : A \to \mathbb{R}$ definida por



$$\xi_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in X \\ 0, & \text{se } x \in A \setminus X \end{cases}$$

Não é difícil mostrar que; $\forall X, Y \subset A$:

- $\xi_{X \cup Y} = \xi_X + \xi_Y - \xi_{X \cap Y}$
- $\xi_{X \cap Y} = \xi_X \cdot \xi_Y$
- $X \subset Y \Rightarrow \xi_X \leq \xi_Y$.

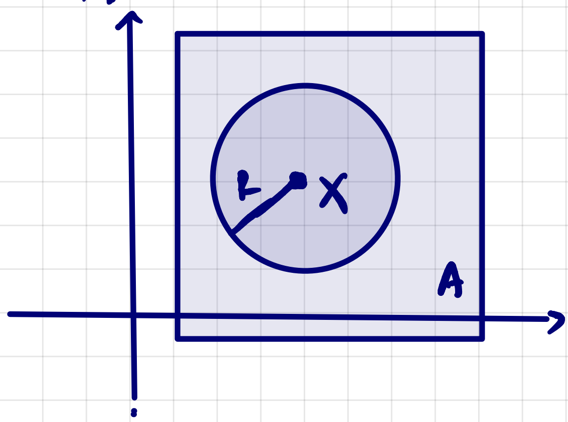
FATO IMPORTANTE: Note que, se $X \subset \operatorname{int} A$, então os pontos de descontinuidade de ξ_X ocorrerão na fronteira de X, i.e., em ∂X.

Frente ao exposto acima, definimos:

Def: Dizemos que um conj. $X \subset \mathbb{R}^m$ é J-mensurável, se, e só se, a função característica $\xi_X : A \to \mathbb{R}$ for integrável.

Neste caso, o volume de X é dado pela integral:

$$\operatorname{vol} X = \int_A \xi_X(x)\,dx.$$

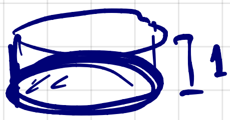


$X \subset A$

$$\xi_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in X \\ 0, & \text{se } x \in A \setminus X \end{cases}$$

$$\int_A \xi_X(x)\,dx = \underbrace{\int_{A\setminus X} \xi_X(x)\,dx}_{0} + \int_X \xi_X(x)\,dx$$

$$= \int_X 1\,dx$$



$$= \pi R^2$$

TEOREMA: Θ conj. $X \subset \mathbb{R}^m$ é J-mensurável $\Leftrightarrow$ $\operatorname{med}(\partial X) = 0$