14/06

CÁLCULO IV

PROF. MAURÍCIO ZAHN.

wp.ufpel.edu.br/zahn

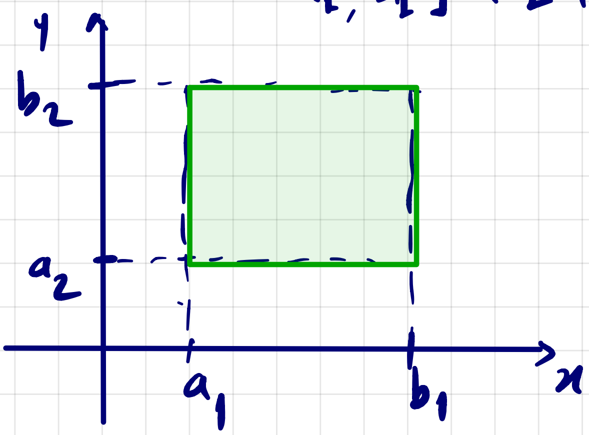
Nesta disciplina vamos estudar integrais múltiplas e cálculo vetorial (a várias variáveis)

INTEGRAIS MÚLTIPLAS:

Def.: Chama-se um bloco m-dimensional $A \subset \mathbb{R}^m$ o conjunto

$$A = \prod_{i=1}^{m} [a_i, b_i] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_m, b_m]$$

Ex.: $\mathbb{R}^2$: $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$



O volume do bloco A é definido por

$$\text{vol}(A) = \prod_{i=1}^{m} (b_i - a_i)$$

$$= (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \cdots \cdot (b_m - a_m)$$

No exemplo acima, temos

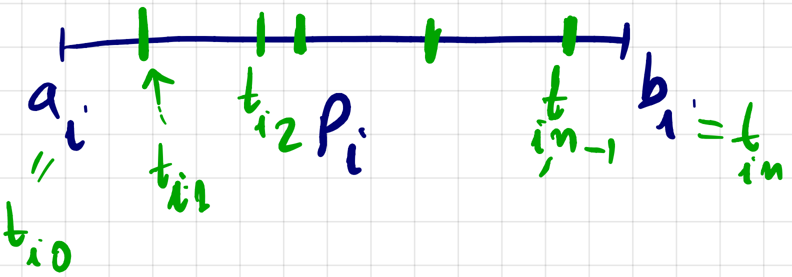
$$\text{vol}(A) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2)$$

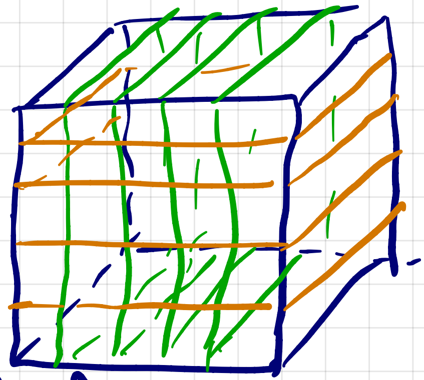
Def.: Chama partição P do bloco A o conjunto $P = P_1 \times P_2 \times P_3 \times \dots \times P_m$, onde

- P_1 é uma partição de $[a_1, b_1]$
- P_2 é uma partição de $[a_2, b_2]$

$\vdots$

- P_m é uma partição de $[a_m, b_m]$.





Uma partição P de um bloco $A \subset \mathbb{R}^m$ divide o bloco A em subblocos $B \in P$.

Note que $\text{Vol } A = \sum_{B \in P} \text{Vol } B$.

(isso por def. de subbloco).

Def.: Chama-se NORMA da partição P o comprimento da maior diagonal do maior subbloco $B \in P$ obtido da partição do bloco $A \subset \mathbb{R}^m$.

Def.: Dizemos que uma função $f : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é limitada no bloco A se, e só se, $\exists M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in A$.

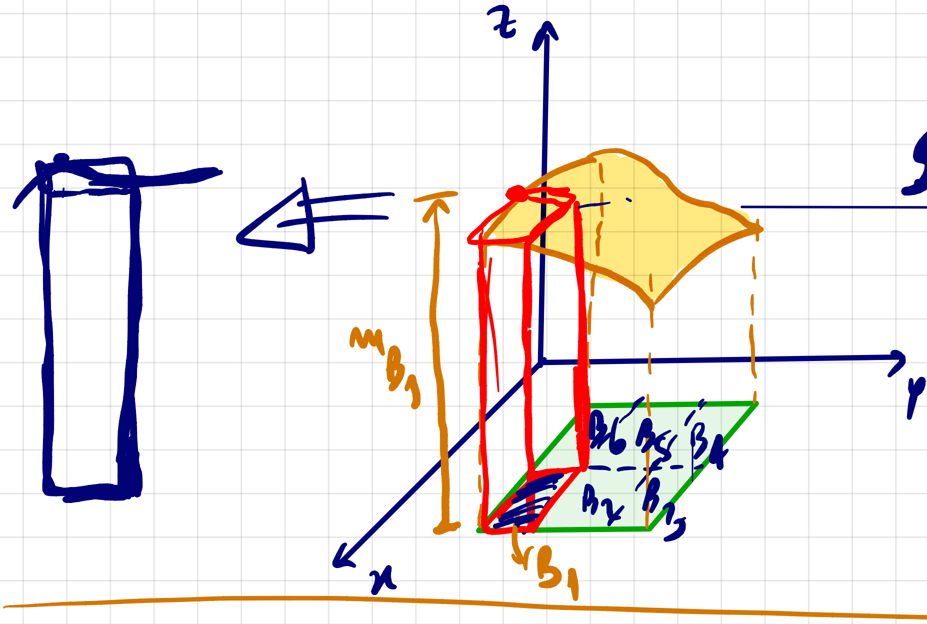
Def.: Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um bloco, $f: A \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Seja P uma partição de A e $B \in P$ um subbloco qualquer de P.

Definimos o ínfimo e o supremo de f no bloco B em relação à partição P, respectivamente, por: (*)

$$m_B = \inf\{f(x) : x \in B\} \quad e \quad M_B = \sup\{f(x) : x \in B\}$$

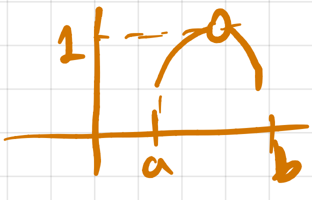
Isto posto, definimos a soma inferior de f em relação à partição P e a soma superior de f em relação à partição P, respectivamente, por:

$$s(f;P) = \sum_{B \in P} m_B \cdot Vol(B) \ ; \ S(f;P) = \sum_{B \in P} M_B \cdot Vol(B)$$



$$s(f;P) = m_{B_1} \cdot Vol(B_1) + m_{B_2} \cdot Vol(B_2) + \dots + m_{B_6} \cdot Vol(B_6)$$

(*) PODEMOS PENSAR, INFORMALMENTE EM MÍNIMO NO LUGAR DE ÍNFIMO E MÁXIMO NO LUGAR DE SUPREMO. (é errado, mas serve para fixar a ideia)



$\nexists$ máx. $f(x)$, mas $\exists \sup f(x) = 1$.

LEMA 1: Seja $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ função limitada no bloco A e P uma partição. Então

$$s(f;P) \leq S(f;P)$$

DEMONSTR.: Seja P uma partição do bloco $A \subset \mathbb{R}^m$.

Então, $\forall B \in P$, $m_B \leq M_B$.

Como $Vol(B) > 0$, então

$$m_B \cdot Vol(B) \leq M_B \cdot Vol(B)$$

Somando sob todos os subblocos que definem P, temos:

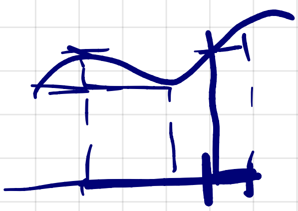
$$\sum_{B \in P} m_B \cdot Vol(B) \leq \sum_{B \in P} M_B \cdot Vol(B),$$

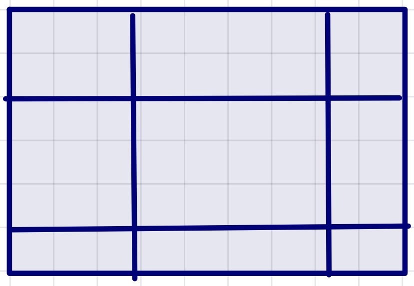
i.e.,

$$s(f;P) \leq S(f;P)$$

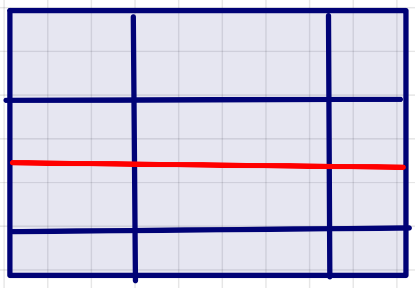
$\square$

Def: Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ um bloco e P, Q duas partições do bloco A. Dizemos que Q é um REFINAMENTO da partição P se $P \subset Q$.





P



Q

PROPOSIÇÃO: Seja $A\subset\mathbb{R}^m$ um bloco, $f: A\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ uma função limitada; P e Q partições de A, com $P\subset Q$ (i.e; Q é um refinamento de P).

Então:

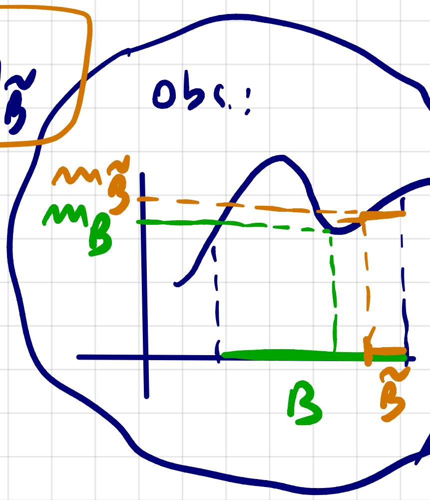
$$s(f;P)\le s(f;Q)\le S(f;Q)\le S(f;P)$$

[ou seja, ao efetuarmos um refinamento, a soma inferior não diminui e a soma superior não aumenta]

DEMONSTR.: Sejam P e Q partições de $A\subset\mathbb{R}^m$, com $P\subset Q$. Sejam $B\in P$ e $\tilde{B}\in Q$ os respectivos subblocos de P e de Q. Então:

$$\tilde{B}\subset B \quad \text{e} \quad \boxed{m_B\le m_{\tilde{B}}}\ (*)$$

Obs.:



Disso:

$$s(f;P)=\sum_{B\in P} m_B\cdot Vol(B)\text{, e como}$$

$$Vol(B)=\sum_{\tilde{B}\subset B} Vol(\tilde{B}),$$

temos:

$$s(f;P)=\sum_{B\in P} m_B\cdot Vol(B)=\sum_{B\in P} m_B\cdot\left(\sum_{\tilde{B}\subset B}Vol(\tilde{B})\right)=$$

$$=\sum_{B\in P}\sum_{\tilde{B}\subset B} m_B\cdot Vol(\tilde{B})\underset{m_B\le m_{\tilde{B}},\ \text{por }(*)}{\le}\overbrace{\sum_{B\in P}\sum_{\tilde{B}\subset B}}^{\sum_{\tilde{B}\in Q}} m_{\tilde{B}}\cdot Vol(\tilde{B})=$$

$$= \sum_{\tilde{B} \in Q} m_{\tilde{B}} \cdot \mathrm{Vol}(\tilde{B}) = s(f; Q)$$

$$\Rightarrow \quad s(f; P) \leq s(f; Q).$$

Como $s(f; Q) \leq S(f; Q)$, pelo LEMA 1,

temos

$$s(f; P) \leq s(f; Q) \leq S(f; Q) \leq S(f; P)$$

SE PROVA ANALOGAMENTE AO QUE SE FEZ PARA PROVAR A 1ª DESIGUALDADE.

$\square$

COROLÁRIO: $s(f; P) \leq S(f; Q)$, quaisquer que sejam as partições P e Q.

(Ou seja, qualquer soma inferior sempre é menor ou igual a qualquer soma superior)

DEMONSTR.: Basta tomar a partição

$$P + Q := \prod_{i=1}^{m} (P_i \cup Q_i)$$

e usar a proposição acima.

Pois $P \subset P+Q$ e $Q \subset P+Q$ (i.e., $P+Q$ será um refinamento para P e para Q).

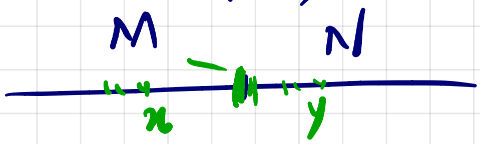
$\square$

Def: Sejam $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada definida no bloco A. Definimos as integrais inferior e superior de f em A por:

$$\underline{\int_A} f = \sup\{s(f;P) : P \text{ é partição de } A\}$$

$$\overline{\int_A} f = \inf\{S(f;P) : P \text{ é partição de } A\}.$$

De um resultado de ANÁLISE REAL I, temos:
Sejam $M, N \subset \mathbb{R}$ conjuntos tais que, $\forall x \in M$, $\forall y \in N$, $x \leq y$.



Então, $\sup M \leq \inf N$. [NO NOSSO CONTEXTO: $\underline{\int_A} f \leq \overline{\int_A} f$]

Além disso, $\sup M = \inf N \iff \forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in M$ e $\exists y \in N$ tais que $x - y < \varepsilon$.

Inspirados pelo resultado acima, temos que:

Def.: $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é integrável no bloco A se, e só se

$$\underline{\int_A} f = \overline{\int_A} f$$ (e neste caso escreveremos $\int_A f$)

$$\Updownarrow$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ P_1, P_2 partições de A tais que
$$S(f;P_1) - s(f;P_2) < \varepsilon.$$

PROP.: $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ limitada no bloco A é integrável em A se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P$ - partição de A tal que

$$S(f; P) - s(f; P) < \varepsilon.$$

DEMONSTR.: (VEREMOS SEXTA)