30/06/23 – AULA 06

Estudamos 2 testes de convergência/divergência na aula anterior. Vamos estudar mais dois testes.

TEOREMA: (TESTE DA RAZÃO) Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c$$

Então:

(i) se $c < 1$, a série converge;

(ii) se $c > 1$ ou $c = \infty$, a série diverge.

(iii) se $c = 1$, o teste é inconclusivo.

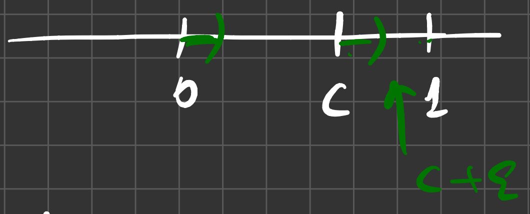
DEMONSTRAÇÃO: Faremos a prova do item (i)

Seja $\sum a_n$ série com $a_n > 0, \forall n$.

Suponha que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c < 1.$, $c > 0$

Dado $\varepsilon > 0$ tal que

$$c + \varepsilon < 1.$$



Como $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c$, então, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall\, n \geq n_0 \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - c \right| < \varepsilon$

Ou seja;

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - c < \varepsilon \quad , \quad \forall n \geq n_0$$

Logo;

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\cancel{a_{n_0+1}}}{a_{n_0}} < c+\varepsilon \\[2ex] \dfrac{\cancel{a_{n_0+2}}}{\cancel{a_{n_0+1}}} < c+\varepsilon \\[2ex] \quad \cancel{\vdots} \\[2ex] \dfrac{a_N}{\cancel{a_{N-1}}} < c+\varepsilon \end{array}\right\}$$

$N-(n_0+1)$ DESIGUALDADES

$N > n_0$

$$\Downarrow$$

Multiplicando todas estas $N-n_0-1$ desigualdades, vamos obter:

$$\frac{a_N}{a_{n_0}} < (c+\varepsilon)^{N-n_0-1} \quad , \quad \forall N \geq n_0$$

$$\Rightarrow \quad a_N < \underbrace{a_{n_0}(c+\varepsilon)^{-n_0-1}}_{= \text{CONSTANTE}} \cdot (\underbrace{c+\varepsilon}_{<1})^N$$

Como a série $\sum_{N=1}^{\infty} K.(c+\varepsilon)^{N}$ é

convergente, pois $c+\varepsilon < 1$ e é uma série geométrica, e como

$$a_N < K.(c+\varepsilon)^{N}, \quad \forall N \geq n_0,$$

pelo teste da comparação estudado na aula passada segue que a série

$$\sum_{N=1}^{\infty} a_N \quad \text{converge.}$$

(ii) se faz de forma similar.

(iii) Seja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (série harmônica)

Sabemos que esta série é divergente. Neste caso,

$$\underline{\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \underline{=1} = c$$

Já sabemos que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{é convergente. Além}$$

disso:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\cancel{(n+1)}(n+2)} \times \frac{n\cancel{(n+1)}}{1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1 = c$$

□

EX-E LISTA 02 .

01) 09 - c) : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$.

Pelo teste da razão, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{e^{n+1}} \times \frac{e^n}{n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\,\cancel{n!}\cdot\cancel{e^n}}{\cancel{e^n}\cdot e\cdot\cancel{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{e} = \infty$$

$\Rightarrow \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$; e então, pelo teste da razão segue a divergência da série dada.

---

02) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!\cdot n}$ (PROVA DO SEMESTRE PASSADO)

Pelo teste da razão:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!\,(n+1)} \times \frac{n!\cdot n}{3^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{3^n}\cdot 3 \cdot \cancel{n!}\cdot n}{(n+1)\cdot \cancel{n!}\cdot (n+1)\cdot \cancel{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{(n+1)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n^2+2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}} = 0 < 1.$$

$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$; logo pelo teste da razão temos que a série dada converge.

TEOREMA (TESTE DA RAIZ)

Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = c$.

Então:

(i) se $c < 1$, a série converge;

(ii) se $c > 1$ ou $c = \infty$, a série diverge.

(iii) se $c = 1$, o teste é inconclusivo.

DEMONSTRAÇÃO:

Provaremos o item (i).

Suponha que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = c < 1$.

Dado $\varepsilon > 0$ tal que $c + \varepsilon < 1$.

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = c$, então $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0 \implies |\sqrt[n]{a_n} - c| < \varepsilon$,

ou seja,

$$-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} - c < \varepsilon \quad , \forall n \geq n_0$$

$$\sqrt[n]{a_n} < c + \varepsilon \quad , \forall n \geq n_0$$

Elevando à potência n, temos:

$$a_n < (\underbrace{c+\varepsilon}_{<1})^n \quad , \forall n \geq n_0 \qquad (*)$$

Como a série $\sum (c+\varepsilon)^n$ é convergente, pois é uma série geométrica de razão $q = c+\varepsilon < 1$, e como vale $(*)$, pelo teste da comparação segue que $\sum a_n$ é convergente.

$\square$

EXEMPLOS:

01) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+3n}{2n-1}\right)^n$ converge ou diverge?

SOLUÇÃO: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[\cancel{n}]{\left(\frac{2+3n}{2n-1}\right)^{\cancel{n}}} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2+3n}{2n-1} = \frac{3}{2} > 1$$

Logo, pelo teste da raiz concluímos que a série dada diverge.

---

02) LISTA 02, 09-d:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

SOLUÇÃO: Pelo teste da raiz, temos:

teste da razão segue converg.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2}$$

$$\frac{(n+1)^2 \cdot \cancel{2^n}}{\cancel{2^n} \cdot 2 \cdot n^2}$$

$$\frac{n^2+2n+1}{2n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[\cancel{n}]{2^{\cancel{n}}}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2}$$

O problema agora consiste em resolver

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2}$$

Note que $\sqrt[n]{n^2} = \sqrt[n]{n.n} = (n.n)^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{1}{n}}.n^{\frac{1}{n}}$

$$= \sqrt[n]{n}.\sqrt[n]{n}.$$

<u>AF.:</u> $\sqrt[n]{n} \to 1$:

Note que $\sqrt[n]{n} \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

De fato, se por absurdo, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sqrt[n_0]{n_0} < 1 \underset{\text{ELEVA À POTENCIA } n_0}{\Longrightarrow} n_0 < 1,$$ Absurdo, pois $n_0 \in \mathbb{N}$.

Define $\boxed{b_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}}$ (*)

Então:

$$\sqrt[n]{n} = 1 + b_n$$

Elevando à pot. n :

$$n = (1+b_n)^n \geq 1 + n.b_n + \frac{n(n-1)}{2}.b_n^2 \; - \uparrow$$

DESPREZANDO O RESTANTE DO DESENVOLVIM. DO BINÔMIO DE NEWTON

Como esta soma é de termos positivos; então

$$n = (1+b_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} b_n^2$$

Logo:

$$0 \leq \frac{n(n-1)}{2} b_n^2 \leq n .$$

Isolando b_n^2 [e isto se faz multiplicando toda a cadeia de desigualdades por 2, e dividindo por $n(n-1)$], obtemos:

$$0 \leq b_n^2 \leq \frac{2}{n-1}$$

Extraindo a raiz quadrada,

$$\underset{\substack{\swarrow \\ 0 \quad n\to\infty}}{0} \leq b_n \leq \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}}_{\searrow 0,\ n\to\infty} \Rightarrow \underset{n\to\infty}{b_n \to 0}$$

$\uparrow$ TEOR. DO SANDUÍCHE PARA SEQUÊNCIAS (LISTA 01)

Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Então, de (*), segue que

$$\sqrt[n]{n} - 1 = b_n \to 0 \Longrightarrow \sqrt[n]{n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1.$$

Disso:

$$\sqrt[n]{n^2} = \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1 \cdot 1 = 1.$$

Com isso, finalmente, concluímos que:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2} = \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} < 1;$$

Donde, pelo teste da raiz, segue que a série $\sum \frac{n^2}{2^n}$ é convergente.

Obs.: Pelo teste anterior (TESTE DA RAZÃO) o resultado sai bem mais direto!!! (Verifique!)
