— 28/06/23 — AULA 05 —

INTEGRAIS DUPLAS:

Vamos considerar funções $f: X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $z = f(x,y)$.

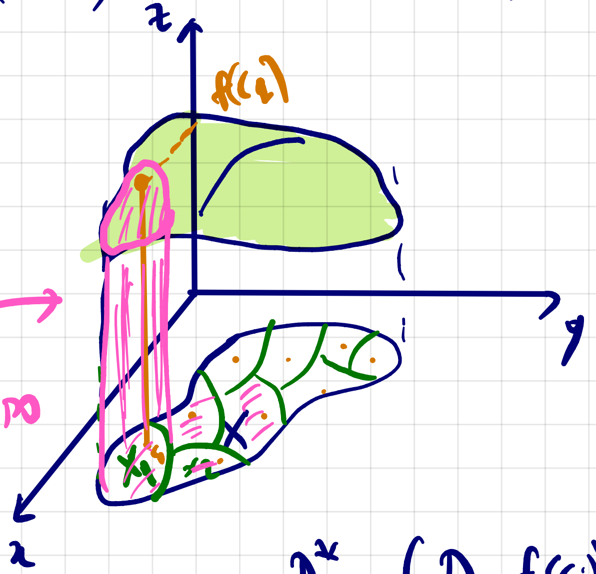
Inicialmente, vamos considerar $f \geq 0$.

Seja $X \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto J-mensurável.

Tome $D = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ uma decomposição do conj. X, com $X_1, X_2, \dots, X_n$ J mensuráveis,

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i \quad ; \quad \text{com } \operatorname{int}(X_i \cap X_j) = \emptyset \text{ se } i \neq j$$

$f(c_1) \cdot Vol(X_1)$
$\parallel$
$f(c_1) \cdot$ ÁREA(X_1)
(VOLUME DO SÓLIDO DE BASE X_1 E ALTURA $f(c_1)$)
etc



$D^* = (D, f(c_i))$: $c_i \in X_i$

DECOMPOSIÇÃO PONTILHADA DE X.

Então, vimos que

$$\iint_X f = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \underline{Vol(X_i)}$$

NO CASO EM $\mathbb{R}^2$, $Vol(X_i) =$ área da região X_i

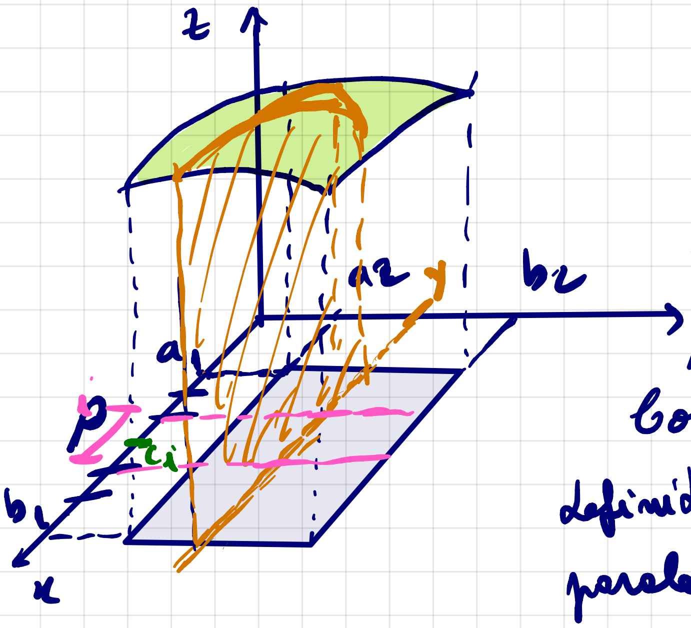
Ou seja, sendo $f \geq 0$ em X,

$$\text{então} \iint_X f = \iint_X f(x,y) \cdot dx\,dy$$

representará o volume do sólido com base sendo a região definida por X e limitado pelo gráfico de f.

Como calcular $\iint_X f$? É o que vamos descrever abaixo:

CASO SIMPLES: considere $f: \overbrace{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]}^{A} \to \mathbb{R}$, com $f \geq 0$. (para dar sentido de volume de sólido.)



Tome $y \in [a_2, b_2]$

Seja P uma partição de $[a_1, b_1]$

Considerando a "lâmina" definida pelo corte do plano paralelo ao plano xz, passando por $y \in [a_2, b_2]$, a sua área será:

$$A(y) = \int_{a_1}^{b_1} f(x, y)\, dx, \quad \forall y \in [a_2, b_2]$$

c.f. CÁLCULO I

Então, o volume V do sólido limitado pelo retângulo $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ e o gráfico de f, pelo PRINCÍPIO DE CAVALIERI

$$\underset{\iint_A f(x,y)\,dx\,dy}{\underset{\parallel}{V}} = \int_{a_2}^{b_2} A(y)\, dy = \int_{a_2}^{b_2} \underbrace{\left[\int_{a_1}^{b_1} f(x, y)\, dx\right]}_{A(y)} dy$$

Ou seja, obtemos:

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_{a_2}^{b_2}\left[\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx\right]dy,$$

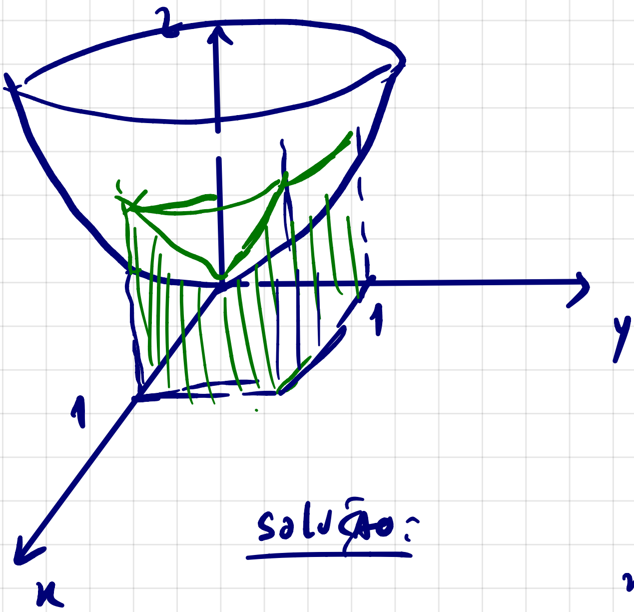
resumindo-se a um cálculo de <u>INTEGRAL ITERADA</u> ou <u>REPETIDA</u>.

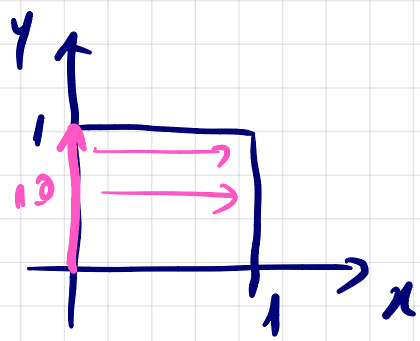
<u>Obs.:</u> Também poderíamos escrever:

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy\,dx$$

<u>EXEMPLOS:</u>

01) $f(x,y) = x^2+y^2$. $A = [0,1]\times[0,1]$





<u>Solução:</u>

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=0}^{x=1}\left(\int_{y=0}^{y=1}(x^2+y^2)\,dy\right)dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{y=0}^{y=1} dx = \int_{x=0}^{x=1} \left[\left(x^2 + \frac{1}{3} \right) - 0 \right] dx$$

TFC em y

$$= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3} x \right) \Bigg|_0^1 =$$

T.F.C. em x

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - (0 + 0) = \underline{\frac{2}{3}}$$

02) $f : [0,1] \times [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x + y$

(O EXEMPLO QUE CALCULAMOS POR DEFINIÇÃO, DADO NA AULA 02)

$$\iint_A f(x,y)\, dx\, dy = \int_{y=0}^{y=2} \left(\int_{x=0}^{x=1} (2x + y)\, dx \right) dy =$$

$$= \int_{y=0}^{y=2} (x^2 + yx) \Big|_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^2 (1 + y - 0)\, dy$$

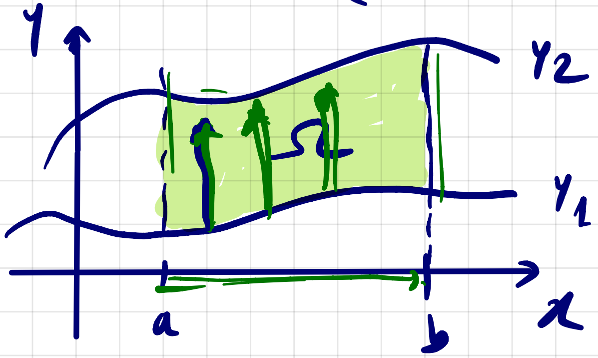
T.F.C. em x

$$= \int_0^2 (1 + y)\, dy = \left(y + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^2 =$$

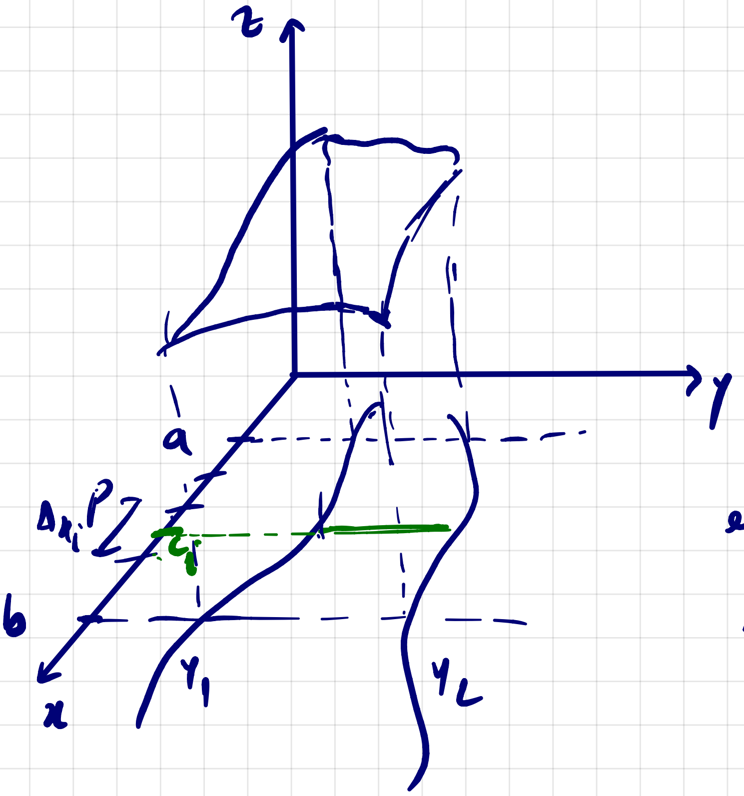
T.F.C. em y

$$= 2 + \frac{4}{2} - 0 = 4 \,/\!/$$

CASO GERAL: O domínio de f não é um retângulo. É uma região limitada por pelo menos uma curva. (mas será um conjunto J-mensurável)



Para dar uma interpretação geométrica assuma que $f \geq 0$ em Ω.



P – partição de $[a,b]$.

$\forall\ y_1 < y \leq y_2$,

seja $c_i \in \Delta x_i$,

então

$$A(y) = \int_{y_1}^{y_2} f(c_i, y)\, dy$$

Logo:

$$V = \iint_{\Omega} f = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} A(y) \cdot \Delta x_i$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{y_1}^{y_2} f(c_i, y)\, dy \right) \Delta x_i$$

OU SEJA, TAMBÉM RESULTA NUMA INTEGRAL ITERADA. $\longrightarrow$ $\displaystyle\int_a^b \int_{y_1}^{y} f(x,y)\, dy\, dx$

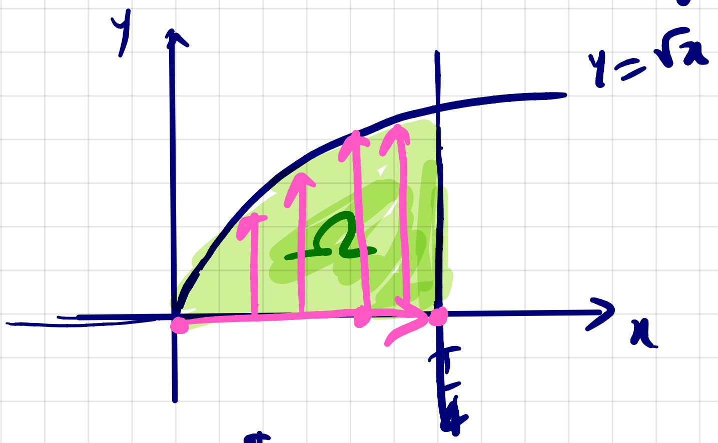
Ex:

01) $\iint_{\Omega} \sqrt{x}\cdot\cos(y\sqrt{x})\,dx\,dy$, onde

Ω é o domínio limitado por $y=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ e pela curva $y=\sqrt{x}$.

eixo x

Solução: Desenhando a região Ω, teremos:



$$\int \cos r\,dr = \operatorname{sen} r + C.$$

$r = y\sqrt{x}$

$dr = \sqrt{x}\,dy$

$r(y)$

$$\iint_{\Omega} f = \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}}\left(\int_{y=0}^{y=\sqrt{x}} \underbrace{\sqrt{x}\cdot\cos(\overbrace{y\sqrt{x}}^{r})\,dy}_{dr}\right)dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} \left(\operatorname{sen} y\sqrt{x}\right)\Big|_{y=0}^{y=\sqrt{x}}\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(\operatorname{sen} x - \underbrace{\operatorname{sen} 0}_{=0}\right)dx$$

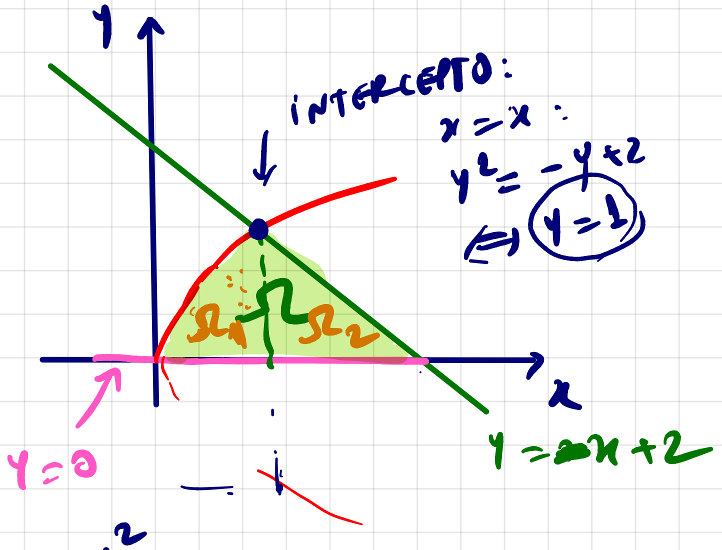
$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = -\cos\frac{\pi}{4} - (-\cos 0)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

02) $\iint_{\Omega} x\sqrt{y}\,dx\,dy$, onde Ω é formado pelas retas $y=0$, $x+y=2$ e pela parábola $x=y^2$, no 1º q.

$y=-x+2$

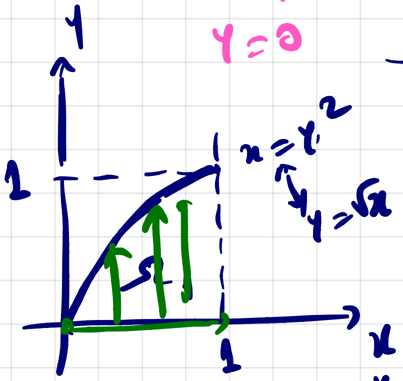
Solução:



$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$$

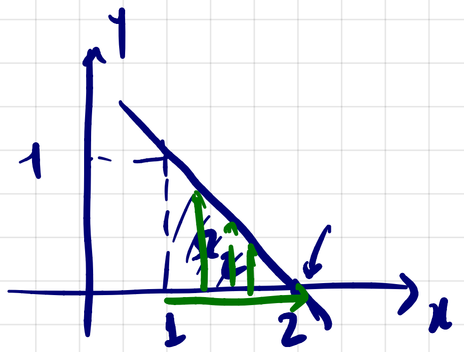
$$\Downarrow$$

$$\iint_{\Omega} f = \iint_{\Omega_1} f + \iint_{\Omega_2} f$$



• $$\iint_{\Omega_1} f = \int_{x=0}^{x=1}\left(\int_{y=0}^{y=\sqrt{x}} x\sqrt{y}\,dy\right)dx = \int_{x=0}^{x=1} x\left(\int_{y=0}^{y=\sqrt{x}} y^{\frac{1}{2}}\,dy\right)dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} x\cdot\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{\sqrt{x}}\,dx = \dots \quad \text{(EXERCÍCIO)}$$



• $$\iint_{\Omega_2} f = \int_{x=1}^{x=2}\int_{y=0}^{y=-x+2} x\sqrt{y}\,dy\,dx = \dots \quad \text{(EXERCÍCIO)}$$

Por fim, $\iint_{\Omega} f = \iint_{\Omega_1} f + \iint_{\Omega_2} f$