Fundação Universidade Federal de Pelotas
Departamento de Matemática e Estatística
Curso de Lic. em Matemática
Segunda Prova de Cálculo III[1]
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: galanito- **Data:** 12/05/2022

Questão 01. Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma função de 3 variáveis reais. Escreva a definição para $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, usando:

(a) [Peso 0,5] a linguagem de bolas abertas em $\mathbb{R}^3$ e em $\mathbb{R}^2$.

(b) [Peso 0,5] a métrica euclidiana d_2 em $\mathbb{R}^3$ e a métrica da soma d_1 em $\mathbb{R}^2$.

Questão 02. Seja a função vetorial $\vec{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\vec{f}(t) = (2\sin t,\, 2t,\, 2\cos t)$.

(a) [Peso 1] Obtenha um vetor tangente unitário ao gráfico de $\vec{f}$ no ponto $P(2, \pi, 0)$. Obtenha também a equação da reta tangente ao gráfico de $\vec{f}$ no mesmo ponto P dado.

(b) [Peso 0,5] Calcule o comprimento do arco determinado pelo gráfico de $\vec{f}$, do ponto $P(2, \pi, 0)$ ao ponto $Q(0, 2\pi, -2)$.

Questão 03. Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \ln(xy)$.

(a) [Peso 2] Determine o domínio Ω e faça o seu esboço. Em seguida, decida se Ω é um aberto de $\mathbb{R}^2$. Determine também o seu fecho e sua fronteira. A origem é um ponto interior de Ω? Justifique.

(b) [Peso 1] Calcule o diferencial total df e a derivada mista $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

(c) [Peso 1] Determine $\dfrac{\partial f}{\partial r}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial s}$, onde $x = re^s$ e $y = r^2 s^3$.

(d) [Peso 0,5] Determine a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}$, sendo $\vec{u} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Questão 04. Defina $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $\vec{F}(x, y) = \left(\sqrt{9 - x^2 - y^2},\, \ln(1 + y - x^2)\right)$.

(a) [Peso 2] Construa o esboço gráfico do domínio Ω de $\vec{F}$. O ponto $A(-1, 0)$ é um ponto interior de Ω? Justifique. Esse mesmo ponto pertence ao fecho de Ω? Justifique.

(b) [Peso 1] Obtenha a matriz Jacobiana $d_a\vec{F}$ de um ponto $a \in \text{int}(\Omega)$.

Questão 05. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(a) [Peso 1] Prove que existem as derivadas parciais na origem, calculando-as.

(b) [Peso 0,5] Mostre que f não é contínua na origem.

(c) [Peso 0,5] Os itens (a) e (b) seriam contraditórios, comparando com o clássico resultado do Cálculo I, que diz: *"se f é derivável em um ponto, então f é contínua no mesmo"*? Justifique sua resposta.

Questão 06. [Peso 1] A altura de um cilindro circular reto está decrescendo a uma taxa de 10 cm/min e o raio crescendo a uma taxa de 4cm/min. Ache a taxa de variação do volume no instante em que a altura é 50 cm e o raio é 16 cm.

---

[1] Obs.: A nota N desta Prova será definida por $N = \frac{\sum \text{Pesos} \times 10}{11{,}5}$.

01) $f: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

(a) $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que

$\forall x \in \Omega;\ x \in B_\delta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(\ell)$.

(b) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $\quad x = (x_1, x_2, x_3)$.

$a = (a_1, a_2, a_3)$

$f(x) = (f_1(x), f_2(x))$. $\quad \ell = (\ell_1, \ell_2)$

Então:

$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que

$\forall x \in \Omega: 0 < d_2(x, a) < \delta \Rightarrow d_1(f(x), \ell) < \varepsilon$;

i.e.;

$\forall x \in \Omega: \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2} \Longrightarrow$

$\Rightarrow |f_1(x) - \ell_1| + |f_2(x) - \ell_2| < \varepsilon$.

02) $\vec{f}(t) = (2\,\text{sen}\,t,\ 2t,\ 2\cos t)$.

em $P(2, \pi, 0) \iff 2t = \pi \iff \boxed{t = \frac{\pi}{2}}$

$$\vec{f}'(t) = (2\cos t,\ 2,\ -2\cdot\text{sen}\,t)$$

$\vec{f}'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ — vetor tangente no ponto P.

$$\vec{f}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(2\cos\frac{\pi}{2},\ 2,\ -2\cdot\text{sen}\frac{\pi}{2}\right) = (0, 2, -2)$$

Denotando o vetor unitário tangente em P por $\vec{u}$, temos

$$\vec{u} = \frac{\vec{f}'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left\|\vec{f}'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\|};$$ onde

$$\left\|\vec{f}'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\| = \sqrt{0+4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Assim, obtemos:

$$\vec{u} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\vec{f}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot(0, 2, -2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{u} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

Seja (r) a reta tangente ao gráfico de $\vec{f}$ no ponto $P(2, \pi, 0)$. Então, sendo $\vec{f}'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ o seu vetor diretor (ou o vetor $\vec{u}$), então, a eq. paramétrica de (r) fica:

$$(r): \begin{cases} x = x_P + at \\ y = y_P + bt \\ z = z_P + ct \end{cases}$$

$$(r): \begin{cases} x = 2 \\ y = \pi + 2t \\ z = -2t \end{cases}$$

(b) $\ell = \int_a^b \|\vec{f}'(t)\| \cdot dt$.

De $\vec{f}(t) = (2\,\text{sen}\,t, 2t, 2\cos t)$; para $P(2, \pi, 0)$, obtemos $2t = \pi \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$; e para $Q(0, 2\pi, -2)$, obtemos $2t = 2\pi \Rightarrow t = \pi$. Sendo

$\vec{f}'(t) = (2\cos t, 2, -2\,\text{sen}\,t)$, obtemos:

$$\ell = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \|\vec{f}'(t)\| dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{(2\cos t)^2 + 4 + (2\,\text{sen}\,t)^2} \cdot dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{4\cos^2 t + 4 + 4\,\text{sen}^2 t} \cdot dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{4(\underbrace{\cos^2 t + \text{sen}^2 t}_{1} + 1)}\, dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{4 \cdot 2}\, dt = 2\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dt = 2\sqrt{2} \cdot t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2\sqrt{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)$$

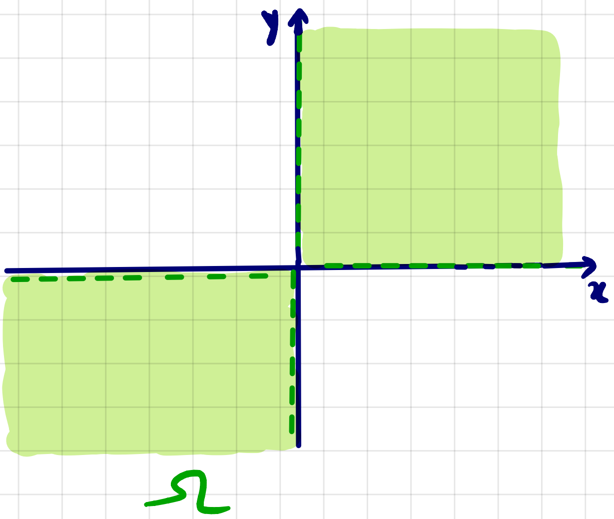
$$= \cancel{2}\sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{\cancel{2}} = \sqrt{2}\pi \implies \boxed{\ell = \sqrt{2}\,\pi}$$

03) $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f(x,y) = \ln(xy)$

(a) $xy > 0 \iff x>0$ e $y>0$ ou $x<0$ e $y<0$.

$\Omega = D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x>0 \text{ e } y>0 \text{ ou } x<0 \text{ e } y<0\}$

gráfico do domínio Ω:



Ω é um aberto do $\mathbb{R}^2$, pois todos os seus pontos são interiores.

fecho: $\overline{\Omega} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y \geq 0\}$

fronteira: $\partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y = 0\}$ – eixos coordenados.

<u>AF:</u> $O(0,0) \notin \operatorname{int} \Omega$. De fato, $\forall \varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(O) \not\subset \Omega$

pois $\forall \varepsilon > 0$, é óbvio que, por exemplo, o ponto

$$(x,y) = \left(\frac{\varepsilon}{2}, -\frac{\varepsilon}{2}\right) \in B_\varepsilon(O),$$

mas $\frac{\varepsilon}{2} \cdot \left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) = -\frac{\varepsilon^2}{4} < 0$; logo, $\left(\frac{\varepsilon}{2}, -\frac{\varepsilon}{2}\right) \notin \Omega$.

(b) $df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$, onde:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\cancel{y}}{x\cancel{y}} = \frac{1}{x} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}y} = \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow \boxed{df = \frac{1}{x} \cdot dx + \frac{1}{y} \cdot dy}$$ (DERIVADA TOTAL)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

(c) $f(x,y) = \ln(xy)$; $x = r \cdot e^{s}$; $y = r^2 s^3$

- $$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot e^{s} + \frac{1}{y} \cdot 2 r s^3 = \frac{1}{r \cancel{e^{s}}} \cdot \cancel{e^{s}} + \frac{1}{r^{\cancel{2}} \cancel{s^3}} \cdot 2\cancel{r}\cancel{s^3}$$

$$= \frac{1}{r} + \frac{2}{r} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{r} + \frac{2}{r}}$$

- $$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot r \cdot e^{s} + \frac{1}{y} \cdot 3 r^2 s^2$$

$$= \frac{1}{\cancel{1e^s}} \cdot \cancel{1e^s} + \frac{1}{\cancel{r^2} s^{\cancel{2}}} \cdot 3\cancel{r^2} s^{\cancel{2}} = 1 + \frac{3}{s}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{s+3}{s}}$$

(d) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \nabla f \cdot \vec{u}$, onde

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \right) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{2x} + \frac{\sqrt{3}}{2y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \frac{y + \sqrt{3}x}{2xy}}$$

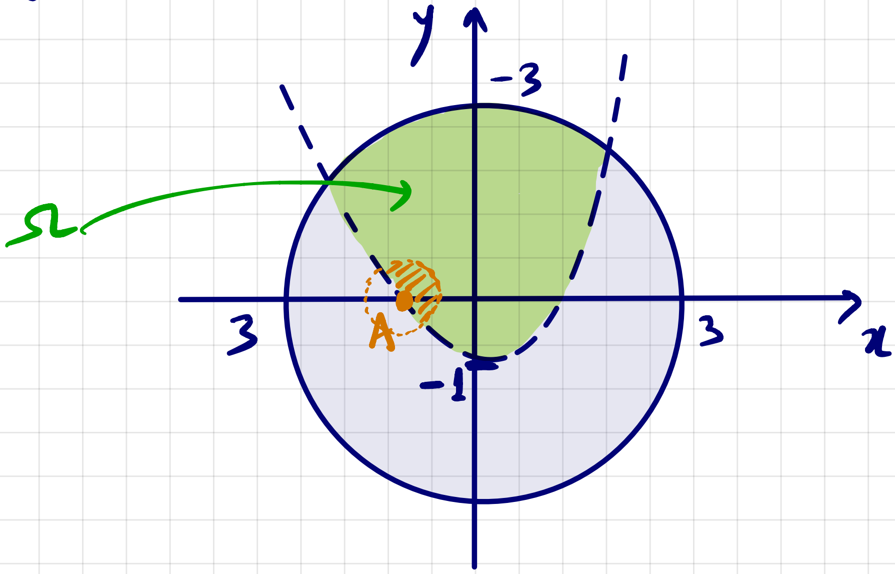
04) $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\vec{F}(x,y) = \left(\sqrt{9 - x^2 - y^2}, \ln(1 + y - x^2) \right)$$

- $9 - x^2 - y^2 \geq 0 \iff x^2 + y^2 \leq 9$
- $1 + y - x^2 > 0 \iff y > x^2 - 1.$

$$\Omega = D(\vec{F}) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9 \text{ e } y > x^2 - 1 \}$$

gráfico do domínio Ω:



O ponto $A(-1,0)$ está destacado na figura acima. Como se pode observar, geometricamente temos que $A \notin \operatorname{int}(\Omega)$. De fato, $\forall \varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(A) \not\subset \Omega$. Por exemplo, o ponto

$$\left(-1-\frac{\varepsilon}{2}, 0\right) \in B_\varepsilon(A),$$

mas está fora de Ω.

$A \in \overline{\Omega}$ (fecho de Ω), pois por exemplo, tome a seq. (x_n) dada por

$$x_n = \left(-1+\frac{1}{n}, 0\right) \subset \Omega,$$

e é tal que

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} (-1,0) = A.$$

(b) $d_a\vec{F} = ?$

$$\vec{F} = (f_1, f_2)$$

$$\Rightarrow \quad d_a\vec{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}, \text{ onde:}$$

$$f_1 = (9 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad f_2 = \ln(1 + y - x^2).$$

Assim:

- $$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{1}{\cancel{2}}(9 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}(-\cancel{2}x) = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$$

- $$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{1}{\cancel{2}}(9 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}(-\cancel{2}y) = \frac{-y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$$

- $$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{-2x}{1 + y - x^2}$$

- $$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{1}{1 + y - x^2}$$

Portanto,

$$d_a\vec{F} = \begin{bmatrix} \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} & \frac{-y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} \\ \frac{-2x}{1 + y - x^2} & \frac{1}{1 + y - x^2} \end{bmatrix}_{(a)}.$$

05)

(a)

- $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x \cdot 0}{\Delta x^2 + 0} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

- $$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{0 \cdot \Delta y}{0 + \Delta y^2} - 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} 0 = 0$$

(b) Basta mostrar que $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. De fato:

- $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$$

- $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{0}{x^2} = 0$$

$\nexists$

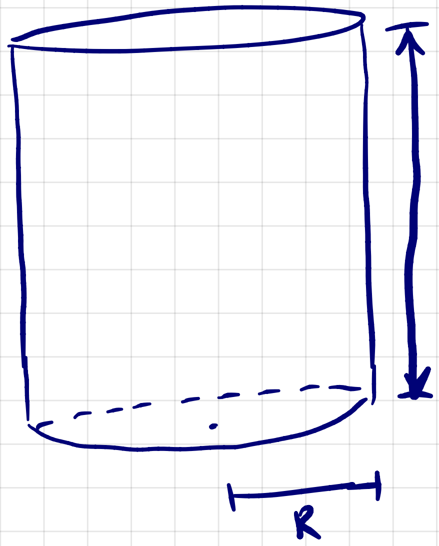
Por caminhos distintos passando por $(0,0)$ temos limites distintos, donde segue que $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$; e

Disso segue que f não é contínua na origem.

(c) Não é contraditório, pois a existência de derivadas parciais não garante a diferenciabilidade, em um dado ponto. O resultado que vale é, sendo f diferenciável, então f é contínua.

---

06)



$$\frac{\partial h}{\partial t} = -10 \text{ cm/min.}$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = 4 \text{ cm/min.}$$

Obter: $\frac{\partial V}{\partial t}$; quando $h = 50$ cm e $R = 16$ cm.

$$V = Ab \cdot h = \pi R^2 \cdot h \qquad \therefore V = V(R, h)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial R} \cdot \frac{\partial R}{\partial t}$$, onde

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \pi R^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial V}{\partial R} = 2\pi R h.$$

Logo:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \pi R^2 \cdot \frac{\partial h}{\partial t} + 2\pi R h \cdot \frac{\partial R}{\partial t} \quad ;$$

e disso, segue que

$$\left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{\substack{R=16;\ \frac{\partial R}{\partial t}=4 \\ h=50;\ \frac{\partial h}{\partial t}=-10}} = \pi \cdot (16)^2 \cdot (-10) + 2\pi \cdot 16 \cdot 50 \cdot 4$$

$$= \pi \cdot 16 \cdot 10 \cdot \left[-16 + 2 \cdot 5 \cdot 4\right]$$

$$= 160\pi \cdot (40 - 16)$$

$$= 24 \cdot 160\pi \quad = 3840\pi \ cm^3/min.$$

Ou seja, o volume cresce a uma taxa de $3840\pi \ cm^3/min$, no instante considerado.