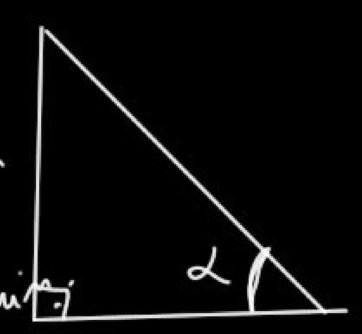
EXTRAS:

LEITHOLD - VOL 2 exercício 29
Pág 956 - 3ª Ed.

01) Num dado instante, o comprimento de um cateto de um triângulo retângulo é 10 cm e ele está crescendo a uma taxa de 1 cm/min. e o comprimento do outro cateto é 12 cm o qual está decrescendo a uma taxa de 2 cm/min. Ache a taxa de variação da medida do ângulo agudo oposto ao lado de 12 cm de comprimento, num dado instante.

SOLUÇÃO:

$$\boxed{\frac{\partial \alpha}{\partial t} = ?}$$



$y = 12\,cm$

$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial t} = -2\,cm/min$

$x = 10\,cm$

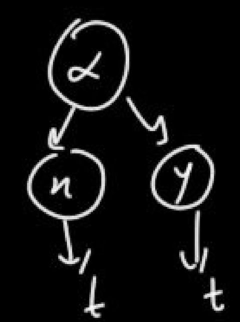
$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t} = 1\,cm/min.$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\alpha = \alpha(x, y)$$

onde: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$



Pela regra cadeia:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial x}\cdot\underbrace{\frac{\partial x}{\partial t}}_{\frac{dx}{dt}} + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\cdot\underbrace{\frac{\partial y}{\partial t}}_{\frac{dy}{dt}}\ ; \text{ onde:}$$

$$\boxed{(\arctan v)' = \frac{v'}{1+v^2}}$$

$$\alpha(x,y) = \arctan(y \cdot x^{-1})$$

- $$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{-1\cdot y x^{-2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = -\frac{\frac{y}{\cancel{x^2}}}{\frac{x^2+y^2}{\cancel{x^2}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2}}$$

- $$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{x^{-1}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{\frac{1}{\cancel{x}}}{\frac{x^2+y^2}{x^{\cancel{2}}}} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}}$$

Assim, no instante dado; i.e.; quando

$\begin{cases} x = 10\,cm\ ;\ \frac{\partial x}{\partial t} = 1\,cm/min \\ y = 12\,cm\ ;\ \frac{\partial y}{\partial t} = -2\,cm/min\ ; \end{cases}$ teremos:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{-y}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{x}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right|_{\substack{x=10 \\ y=12 \\ \frac{\partial x}{\partial t}=1\ ;\ \frac{\partial y}{\partial t}=-2}} = \frac{-12}{100+144}\cdot 1 + \frac{10}{100+144}\cdot(-2)$$

$$= \frac{-12}{244} - \frac{20}{244} = \frac{-32}{244}\ rad/min$$

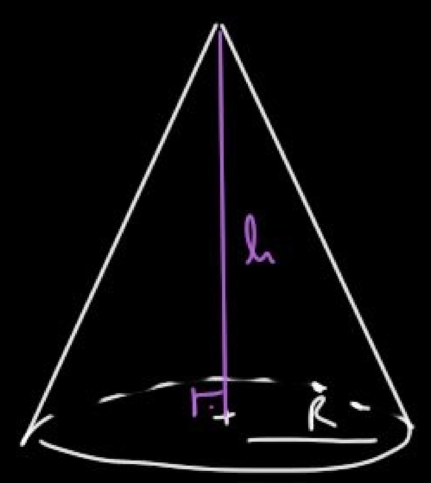
$$= -\frac{8\cdot\cancel{4}}{\cancel{4}\cdot 61}\ rad/min$$

$$= -\frac{8}{61}\ rad/min.$$

Ou seja, o ângulo α está decrescendo a uma taxa de $\frac{8}{61}$ rad/min. no instante considerado

02) A altura de um cone circular reto está aumentando a uma taxa de 40 cm/min e o raio decrescendo a uma taxa de 15 cm/min. Ache a taxa de variação do volume no instante em que a altura é 200 cm e o raio é 60 cm.

SOLUÇÃO:



$h = 200\,cm \;;\; \frac{\partial h}{\partial t} = 40\,cm/min$

$R = 60\,cm. \;\; \frac{\partial R}{\partial t} = -15\,cm/min$

$$V = \frac{Ab \cdot h}{3} = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3}$$

$$V = V(R)(h)$$

$t \qquad t$

$R = R(t)$

$h = h(t)$

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} = ?}$$

Pela regra da cadeia.

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial h}\cdot\frac{\partial h}{\partial t} \;;\; \text{onde: } \frac{\partial V}{\partial R} = \frac{2\pi}{3} R \cdot h, \quad \frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi}{3} R^2$$

Assim, obtemos:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{2\pi}{3} R \cdot h \cdot \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\pi}{3} \cdot R^2 \cdot \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{2\pi}{3} \cdot 60 \cdot \underbrace{200}_{20 \cdot 10} \cdot (-15) + \frac{\pi}{3} \cdot (60)^2 \cdot 40$$

$R = 60\,cm \;;\; \frac{\partial R}{\partial t} = -15\,cm/min$

$h = 200\,cm \;;\; \frac{\partial h}{\partial t} = 40\,cm/min$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot 60 \cdot 40 \left[-150 + 60\right]$$

$$= -90 \cdot \overset{20}{\cancel{60}} \cdot 40 \, \frac{\pi}{\cancel{3}} = -7200\pi \; cm^3/min$$

Ou seja, o volume V diminui a uma taxa de 7200π cm^3/min no instante considerado.

---

03) A altura de um cilindro circular reto está decrescendo a uma taxa de 10 cm/min e o raio crescendo a uma taxa de 4 cm/min. Ache a taxa de variação do volume no instante em que a altura é 50 cm e o raio é 16 cm.

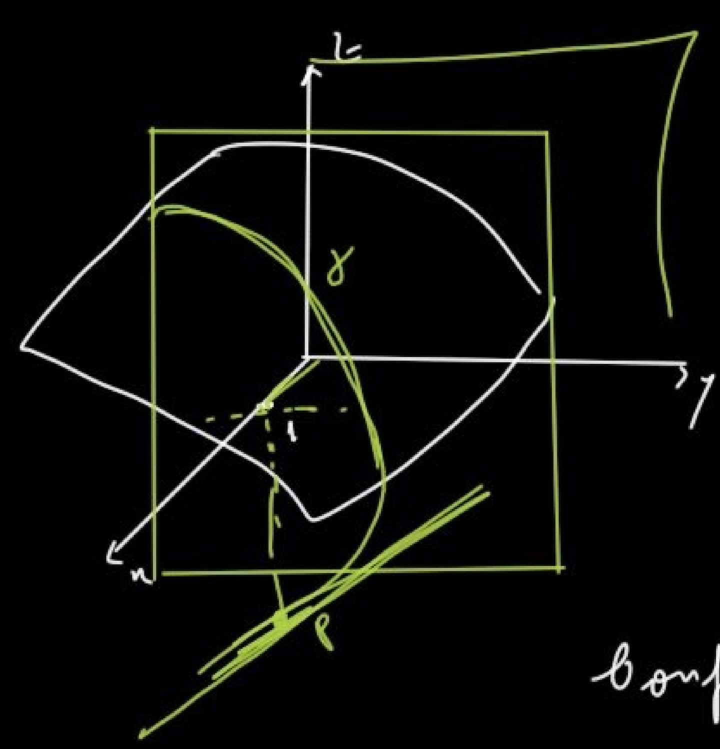
(Resp: cresce a uma taxa de 3840π cm^3/min)

LISTA 08 .

6. Ache a inclinação da reta tangente à curva de interseção da superfície $36x^2 - 9y^2 + 4z + 36 = 0$ com o plano $x = 1$ no ponto $P(1, \sqrt{12}, -3)$. Interprete essa inclinação como uma derivada parcial.

$x \quad y \quad f(x,y)$

$36 - 108 + 12 + 36$



12
$\sqrt{9/8}$

$36x^2 - 9y^2 + 4z + 36 = 0$

$108 - 72$

$z = f(x,y)$

$$\boxed{z = \frac{9y^2 - 36x^2 - 36}{4}}$$

$$f(x,y) = \frac{9}{4}y^2 - 9x^2 - 9$$

Conforme visto em aula, temos que a inclinação procurada será dada por

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_P = \frac{\partial}{\partial y} f(1, \sqrt{12}) \quad , \text{ onde}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{9}{4} \cdot 2y = \frac{9}{2} y .$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_P = \left.\frac{9}{2} y \right|_{\substack{x=1 \\ y=\sqrt{12}}} = \frac{9}{2}\sqrt{12}$$

LISTA 06

13. Nos exercícios a seguir verifique se f é contínua na origem.

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(c) $f(0,0) = 0$.

AF: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Dado $\varepsilon > 0$. Precisamos encontrar $\delta > 0$, tal que

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 < d((x,y),(0,0)) < \delta \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \varepsilon$.

$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$

Analisando:

$$|f(x,y) - 0| = |f(x,y)| = \frac{|xy|}{|x|+|y|} = \frac{|x|\cdot|y|}{|x|+|y|} \leq \frac{(|x|+|y|)(\cancel{|x|+|y|})}{\cancel{|x|+|y|}}$$

$|x| \leq |x| + |y|$

$|y| \leq |y| + |x|$

$$\Rightarrow |f(x,y) - 0| \leq |x| + |y| < \delta + \delta = 2\delta := \varepsilon$$

$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta$

$|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta$

Ou seja, basta tomar $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Portanto, $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$; i.e.,

f é contínua na origem. $\square$