

Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Cálculo II
Curso de Lic. em Matemática
Prof. Dr. Maurício Zahn

**Lista 04 de Exercícios - Integrais envolvendo completamento de quadrado.
Integração por partes. Integração por substituição trigonométrica.**

1. Calcule as integrais a seguir:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int \frac{(2x+3)dx}{x^2-4x+1} & \text{(b)} \int \frac{(7x-4)dx}{3x^2-4x+5} & \text{(c)} \int \frac{(2x-4)dx}{\sqrt{x^2-12x+4}} \\ \text{(d)} \int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2+x+1}} & \text{(e)} \int \frac{(1-3x)dx}{4x^2+12x-5} & \text{(f)} \int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{2-3x^2}} \end{array}$$

2. Calcule as integrais a seguir, através de uma substituição trigonométrica:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int \frac{dx}{9x^2+5} & \text{(b)} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-16}} & \text{(c)} \int \frac{dx}{4x^2+4x-6} \\ \text{(d)} \int \sqrt{4x^2+9} dx & \text{(e)} \int \frac{dx}{\sqrt{1+2x+3x^2}} & \text{(f)} \int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^3} dx \end{array}$$

3. Calcule cada integral a seguir, usando a integração por partes.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int x \sin x dx & \text{(b)} \int x \sec^2 x dx & \text{(c)} \int \operatorname{arccot} x dx \\ \text{(d)} \int \arccos 2x dx & \text{(e)} \int x^2 e^{-x} dx & \text{(f)} \int \ln x dx \\ \text{(g)} \int x^2 \arcsin x dx & \text{(h)} \int \frac{\ln x dx}{(x+1)^2} & \text{(i)} \int \arctan \sqrt{x} dx \\ \text{(j)} \int e^{2x} \cos 3x dx & \text{(k)} \int (x^3 - 3x + 1) \ln x dx & \\ \text{(l)} \int \arcsin \sqrt{\frac{x}{2}} dx & \text{(m)} \int \csc^3 x dx & \text{(n)} \int e^{2x} \sin \frac{x}{2} dx \end{array}$$

4. Leia atentamente a tira abaixo, adaptada da Turma do Mandachuva.



O problema que os personagens discutem consiste na resolução da integral indefinida

$$\int \sin x \cos x dx.$$

Pela narrativa da tira, existem diferentes formas de se calcular essa integral.

(a) Calcule $\int \sin x \cos x dx$ usando a dica que o Mandachuva dá no primeiro quadro.

- (b) Mandachuva também comenta, no segundo quadro, outra forma de resolver o problema acima. Resolva-o dessa outra forma também.
- (c) O personagem Chuchu, que está de camiseta branca, no segundo quadro, faz a mudança $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$. Resolva dessa forma o mesmo problema.
- (d) No terceiro quadro, um terceiro personagem afirma ter usado integração por partes. Resolva dessa forma.
- (e) Alguns dos casos resolvidos acima apresentam respostas aparentemente diferentes, no entanto, todas elas são equivalentes. Você saberia explicar isso ao personagem Batatinha (o mais baixo no terceiro quadro)?
5. Deduza a seguinte *fórmula de recorrência*: dado $r \in \mathbb{R}$, vale a fórmula:

$$\int x^r e^x dx = x^r e^x - r \int x^{r-1} e^x dx.$$

6. Use a fórmula do exercício anterior para calcular $\int x^4 e^x dx$.

7. Deduzir, onde $r \in \mathbb{R}$, a fórmula:

$$\int x^r \ln x dx = \begin{cases} \frac{x^{r+1}}{r+1} \ln x - \frac{x^{r+1}}{(r+1)^2} + c, & \text{ser } \neq -1 \\ \frac{1}{2} (\ln x)^2 + c, & \text{ser } = -1 \end{cases}$$

Em seguida, calcule $\int x^{12} \ln x dx$.

8. Mostre que, $\forall n \in \mathbb{N}$, vale

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx.$$

Em seguida, calcule $\int \sin^4 x dx$.

9. Calcule cada integral definida a seguir:

$$(a) \int_{-1}^2 \ln(x+2) dx \quad (b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \sqrt{2x} dx \quad (c) \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$$