05/04/23

TEOREMA (UNICIDADE DO LIMITE) O limite de uma função $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, se existir, é único.

Mais precisamente: se $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, a um ponto de acumulação do conj. $A \subset \mathbb{R}^m$ (e escrevemos $a \in A'$)(*), se $\lim_{x \to a} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = l_2$, então $l_1 = l_2$.

DEMONSTR.: Sejam $\lim_{x \to a} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = l_2$, $l_1, l_2 \in \mathbb{R}^n$.

Por absurdo, suponha $l_1 \neq l_2$.

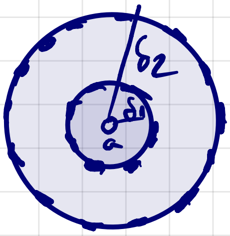
Tome $\varepsilon = d(l_1, l_2) > 0$.

Como $\lim_{x \to a} f(x) = l_1$, então, $\exists\, \delta_1 > 0$, tal que, $\forall x \in B_{\delta_1}(a) \setminus \{a\} \Rightarrow d(f(x), l_1) < \frac{\varepsilon}{2}$. (*)

Do mesmo modo, como $\lim_{x \to a} f(x) = l_2$, então $\exists\, \delta_2 > 0$ tal que, $\forall x \in B_{\delta_2}(a) \setminus \{a\} \Rightarrow d(f(x), l_2) < \frac{\varepsilon}{2}$. (**)

(*) A' é o conj. de todos os pontos de acumulação do conjunto A, e é chamado de DERIVADO do conjunto A.

Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$.



Então, $\forall x \in B_\delta(a)\setminus\{a\}$, valem (*) e (**)

Assim, teremos:

$$\varepsilon = d(\ell_1,\ell_2) \underset{\text{DESIGUALDADE TRIANGULAR}}{\le} \underbrace{d(\ell_1, f(x))}_{<\frac{\varepsilon}{2}\ \text{(por (*))}} + \underbrace{d(f(x),\ell_2)}_{<\frac{\varepsilon}{2}\ \text{(por (**))}} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

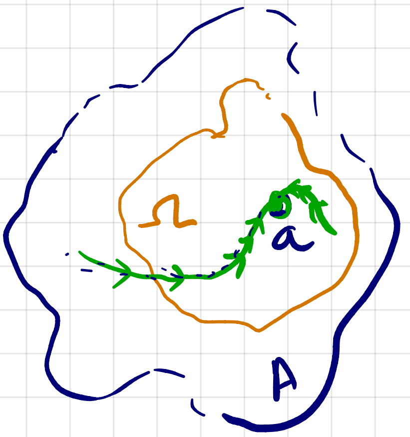
$$\Longrightarrow \varepsilon < \varepsilon.$$ Absurdo!

Portanto, $\ell_1 = \ell_2$. $\square$

No que segue, vamos procurar, para o caso de funções $\mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$, uma forma de generalizar e/ou adaptar o conceito que possa equivaler, num certo sentido, ao conceito de limites laterais que temos para funções de uma variável real.

TEOREMA: Seja $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função, a um ponto de acumulação do conj. A (i.e., $a \in A'$) e $\Omega \subset A$, com $a \in \Omega'$ (ou seja, Ω é um subconj. de A no qual a também será um ponto de acumulação para Ω).

Então, se $\exists \lim_{x \to a} f(x) = l \in \mathbb{R}^n$, então



$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in \Omega}} f(x) = l.$$

isto vai fazer a substituição do conceito que tínhamos p/ uma variável de limites laterais.

DEMONSTR.: Seja $\lim_{x \to a} f(x) = l$. Então, dado $\varepsilon > 0$,

$\exists\, \delta > 0$ tal que, $\forall x \in A$ tal que $x \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$,

implica em $f(x) \in B_\varepsilon(l)$.

Em particular, para $x \in \Omega \cap (B_\delta(a) \setminus \{a\})$,

teremos $f(x) \in B_\varepsilon(l)$, ou seja, temos que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in \Omega}} f(x) = l.$$

$\square$

COROLÁRIO: Sejam $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $a \in A'$, $\Omega, \Lambda \subset A$, com $a \in \Omega'$ e $a \in \Lambda'$ (i.e., a é também ponto de acumulação dos conjuntos Ω e Λ).

Então, se $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in \Omega}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in \Lambda}} f(x)$, então

$$\nexists \lim_{x \to a} f(x).$$

Obs.: O equivalente a este resultado na reta seria:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \to a} f(x).$$

DEMONSTR.: Por absurdo, suponha que

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) = l \in \mathbb{R}^n.$$

Então, sendo $\Omega, \Lambda \subset A$, com $a \in \Omega'$ e $a \in \Lambda'$, segue do teorema anterior que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in \Omega}} f(x) = l \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x \in \Lambda}} f(x) = l;$$

uma contradição com a hipótese do corolário. Absurdo!

Portanto, $\nexists \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

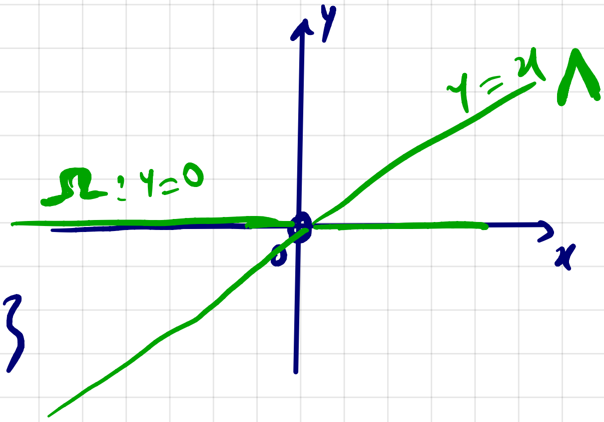
$\square$

EXEMPLOS:

01) Verifique se existe o limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^3+y^3}$$

Considere caminhos diferentes (de fato, cada caminho será um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, sendo $0 \in \Omega'$).



• $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : y = 0\}$

Neste caso, temos:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Omega}} \frac{xy^2}{x^3+y^3} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=0}} \frac{xy^2}{x^3+y^3} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=0}} \frac{x\cdot 0^2}{x^3+0^3}$$

$$= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=0}} \frac{0}{x^3} = 0$$

• $\Lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : y = x\}$:

Neste caso, temos:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Lambda}} \frac{xy^2}{x^3+y^3} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=x}} \frac{xy^2}{x^3+y^3} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=x}} \frac{x\cdot x^2}{x^3+x^3} =$$

$$= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{\cancel{x^3}}{2\cancel{x^3}} = \frac{1}{2}$$

Portanto, obtemos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in\Omega}} f(x,y) = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in\Lambda}} f(x,y) \; ;$$

ou seja, $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^3+y^3}$.

---

02) Verifique se $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2y^2}{x^2+y^2}$

$$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$$

Se tomarmos diferentes caminhos que contenham a origem, sempre obteremos mesmo limite, o que <u>sugere</u> que o limite possa existir. De fato; sendo; por exemplo:

- $\Omega_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=0\}$;

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in\Omega_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{3\cdot 0}{0+y^2} = 0$$

- $\Omega_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=x\}$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in\Omega_2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{3x^4}{x^2+x^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{3x^{\cancel{4}}}{2\cancel{x^2}} = 0$$

$$f(x,y) = \frac{3x^2y^2}{x^2+y^2} \qquad f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}.$$

Vamos mostrar que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$

Dado $\varepsilon > 0$. Precisamos achar $\delta > 0$ tal que,

$$\forall (x,y) \in B_\delta((0,0)) \setminus \{(0,0)\} \implies f(x,y) \in B_\varepsilon(0)$$

i.e., $\forall (x,y)$ tal que

$$0 < \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} < \delta \implies |f(x,y) - 0| < \varepsilon.$$

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

Note que:

$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{3x^2y^2}{x^2+y^2}\right| = \frac{3 \cdot x^2 \cdot y^2}{x^2+y^2} \leq$$

$$\leq \frac{3 \cdot (x^2+y^2) \cdot \cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{x^2+y^2}} = 3(x^2+y^2)$$

pois

$x^2 \leq x^2+y^2$

e $y^2 \leq x^2+y^2$

$$= 3\big(\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{<\delta}\big)^2 < 3\delta^2 := \varepsilon$$

$$\implies \delta^2 = \frac{\varepsilon}{3} \implies \boxed{\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}}$$

Ou seja, basta tomar $\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$.

Isso prova que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y^2}{x^2+y^2} = 0.$$