VARIÁVEIS COMPLEXAS

$\boxed{06/08/25 - \text{AULA } 27}$

Vejamos mais alguns exemplos da aplicação de séries de Taylor.

01) Expandir em $z=0$, $f(z) = \text{sen}\, z$.

Solução:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-0)^n \, ; \text{ onde}$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

$$f(z) = \text{sen}\, z = f^{(4)}(z) = f^{(8)}(z)$$

$$f'(z) = \cos z = f^{(5)}(z) \qquad \vdots$$

$$f''(z) = -\text{sen}\, z = f^{(6)}(z) \qquad \vdots$$

$$f'''(z) = -\cos z = f^{(7)}(z)$$

Disso, em $z=0$, teremos:

$$\boxed{f^{(0)}(0) = f(0)}$$

$$f(0) = f^{(4)}(0) = f^{(8)}(0) = \text{sen}\, 0 = 0$$

$$f'(0) = f^{(5)}(0) = f^{(9)}(0) = \cos 0 = 1.$$

$$f''(0) = f^{(6)}(0) = f^{(10)}(0) = -\text{sen}\, 0 = 0$$

$$f'''(0) = f^{(7)}(0) = f^{(11)}(0) = -\cos 0 = -1.$$

Disso:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

$$= \underbrace{\frac{0}{0!} \cdot z^0}_{=0} + \frac{\overbrace{f'(0)}^{1}}{1!} z + \frac{\overbrace{f''(0)}^{=0}}{2!} z^2 + \frac{\overbrace{f'''(0)}^{-1}}{3!} z^3 + \frac{\overbrace{f^{(4)}(0)}^{=0}}{4!} z^4 + \cdots$$

$$= z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 - \frac{1}{7!} z^7 + \frac{1}{9!} z^9 - \frac{1}{11!} z^{11} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot z^{2n+1} .$$

$$\Longrightarrow \boxed{\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot z^{2n+1}}$$

$R = \infty$ (VERIFIQUE).

---

02) SÉRIE BINOMIAL: é usada para representar uma série para função do tipo

$$f(z) = (1+z)^{\alpha} \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{C} \; ;$$

que é uma função plurívoca; e portanto,

consideraremos em algum ramo. No ramo principal (onde $f(0)=1$), teremos:

$$f(z) = (1+z)^{\alpha}$$

$$f'(z) = \alpha(1+z)^{\alpha-1}$$

$$f''(z) = \alpha.(\alpha-1).(1+z)^{\alpha-2}$$

$$f'''(z) = \alpha.(\alpha-1)(\alpha-2).(1+z)^{\alpha-3}$$

$$\vdots$$

Desenvolvendo em $z=0$, teremos:

$$f(0) = 1.$$

$$f'(0) = \alpha$$

$$f''(0) = \alpha.(\alpha-1)$$

$$f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha.(\alpha-1).(\alpha-2).\ldots.(\alpha-n+1)$$

Então:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}} z^n \; ;$$

e denotando:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha!}{n!(\alpha-n)!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))\cdot\cancel{(\alpha-n)!}}{n!\,\cancel{(\alpha-n)!}}$$

$$= \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}}$$

Disso:

$$f(z) = (1+z)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n .$$

Qual é o seu raio de convergência?

$$R = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\left|\binom{\alpha}{n}\right|}{\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|} =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{\cancel{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{\cancel{\alpha(\alpha-1)\cdots}(\alpha-n)} \right|$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{(n+1)!}{n!\,(\alpha-n)} \right| = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{(n+1)\cdot\cancel{n!}}{\cancel{n!}\cdot|n-\alpha|}$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n+1}{|n-\alpha|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{n+1}{n-\alpha} \right| =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{1+\overbrace{\frac{1}{n}}^{\to 0}}{1-\underbrace{\frac{\alpha}{n}}_{\to 0}} \right| = 1. \Rightarrow \boxed{R = 1}$$

---

03) Obter a série de Taylor para $f(z) = z \cdot e^{z^2}$, em $z = 0$.

Sol.: Sabemos que $e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$

Em particular, para $w = z^2$:

$$e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}$$

Então;

$$f(z) = z \cdot e^{z^2} = z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n!}$$

04) Idem para $f(z) = \dfrac{z}{1+z^2}$ em $z = 0$

Neste caso, vamos usar a série geométrica.

Note que:

$$\frac{z}{1+z^2} = z \cdot \frac{1}{1-\underbrace{(-z^2)}_{w}} = z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n =$$

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n$$

$$= z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot z^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot z^{2n+1}$$

$R: \quad |-z^2| < 1 \iff |z| < 1.$

SÉRIE DE LAURENT

No estudo de séries de Taylor, vimos que, se $f \in \mathcal{O}(D_r(z_0))$, então, existe uma representação única para a f em série de Taylor.

Mostraremos que, se f for holomorfa no conjunto $A_{r,R}(z_0)$ dado por:

$$A_{r,R}(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} : \ r < |z - z_0| < R \}$$

(anel de raios $r < R$ centrado em z_0); ainda é possível representar a f em série de potências; e mostraremos que não existem termos com potências negativas de $z - z_0$.

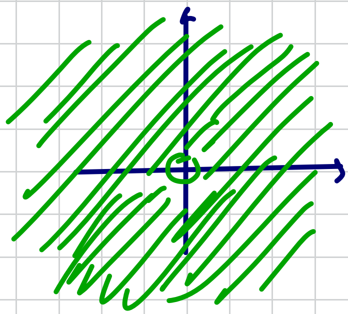
Para ilustrar, considere representar em $z_0 = 0$ a série para $f(z) = \dfrac{e^z}{z^3}$:

$$\frac{e^z}{z^3} = \frac{1}{z^3} \cdot e^z = \frac{1}{z^3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} =$$

$$= \frac{1}{z^3}\cdot\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z}}_{\text{FATORES COM POTÊNCIAS NEGATIVAS.}} + \frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \frac{z^2}{5!} + \cdots$$

Neste caso, a série vai convergir uniformemente no anel $A_{r,\infty}(0)$; $r>0$. (pois tal representação não tem sentido em $z=0$)



<u>TEOREMA:</u> Seja $f \in \mathcal{O}(A_{r,R}(z_0))$, onde $0 \leq r < R \leq \infty$.
Então, f possui uma representação única como uma série da forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} \; ;$$

$r < |z-z_0| < R$; que converge absolutamente, $\forall z \in A_{r,R}(z_0)$ e uniformemente em todo anel fechado do tipo

$$\rho_1 \leq |z-z_0| \leq \rho_2 \; ; \; \text{onde } r < \rho_1 < \rho_2 < R.$$

A série acima chama-se <u>representação de Laurent para a f.</u>

Os números da forma

$$a_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\rho(z_0)} \frac{f(w)\,dw}{(w-z_0)^{m+1}} \; ; \; m \in \mathbb{Z},$$

onde $r < \rho < R$, e são chamados de <u>coeficientes de Laurent</u> da f.

Faremos a prova na próxima aula.