TEOREMA DO SANDUÍCHE

TEOREMA: Sejam $f, g, h : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^m$ um ponto de acumulação do conjunto A. Suponha que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad \forall x \in A.$$

e que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$.

Então, $\exists \lim_{x \to a} g(x) = L$.

DEMONSTR.: Sejam $f, g, h : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ nas hipóteses do teorema.

Dado $\varepsilon > 0$.

Como $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então $\exists \delta_1 > 0$ tal que,

$$\forall x \in A: \quad x \in B_{\delta_1}(a) \setminus \{a\} \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \quad (*)$$

Ainda, como $\lim_{x \to a} h(x) = L$, então $\exists \delta_2 > 0$ tal que

$$\forall x \in A: \quad x \in B_{\delta_2}(a) \setminus \{a\} \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon. \quad (**)$$

Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Assim, $\forall x \in A \subset \mathbb{R}^m$, tal que $x \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$, valem $(*)$ e $(**)$, ou seja, valem

$$L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon \quad e \quad L-\varepsilon < h(x) < L+\varepsilon$$

Como por hipótese

$$L-\varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L+\varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad L-\varepsilon < g(x) < L+\varepsilon \quad , \text{ i.e. } ,$$

$$|g(x)-L| < \varepsilon, \text{ sempre que } x \in B_\delta(a) \setminus \{a\}.$$

Ou seja, mostramos que

$$\lim_{x \to a} g(x) = L.$$

$\square$

---

obs.: O teor. acima vale para $\mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}$.

Não há um teorema do sanduíche para $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, com $n > 1$, pois devemos ter uma cadeia de desigualdades do tipo

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad ;$$

ou seja, a imagem deve ser um subconj. da reta, não do $\mathbb{R}^n$.