CÁLCULO 3, TURMA T3

27/04/26 - AULA 13

DIFERENCIABILIDADE NO $\mathbb{R}^m$.

INTRODUÇÃO: Do Cálculo 1 conhecemos o seguinte resultado:

PROP.: Se $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for uma função derivável em um intervalo aberto I, então f é contínua nesse intervalo.

Queremos verificar se este resultado ainda vale no caso a mais variáveis reais.

Por exemplo, considere $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Afirmamos que f não é contínua na origem. De fato, note que:

- $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \dfrac{x\cdot 0}{x^2+0^2} = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} 0 = 0;$

e

- $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \dfrac{x\cdot x}{x^2+x^2} = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \dfrac{\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}} = \dfrac{1}{2}$ //

Logo, $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$; e disso segue que f não é contínua em $(0,0)$.

Porém, note que

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h,0) - \overset{0}{\overbrace{f(0,0)}}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-0}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\overset{0}{\dfrac{h\cdot 0}{h^2+0^2}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0,0+h)-\overset{0}{\overbrace{f(0,0)}}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0,h)-0}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{0 \cdot h}{0^2 + h^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Ou seja, as derivadas parciais na origem existem e são iguais a zero.

Então, pelo feito acima, temos: f possui derivadas parciais na origem, mas não é contínua ali.

Isso parece contradizer o resultado que temos no cálculo 1. No entanto, aqui relacionamos continuidade e derivação parcial, e não continuidade com DIFERENCIAÇÃO.

Então, precisamos do conceito de diferenciação a várias variáveis, para mostrar que o resultado continua válido. Ou seja, mostraremos que, se f for DIFERENCIÁVEL em um ponto $a \in \mathbb{R}^m$, então f será contínua neste ponto.

DIFERENCIAÇÃO:

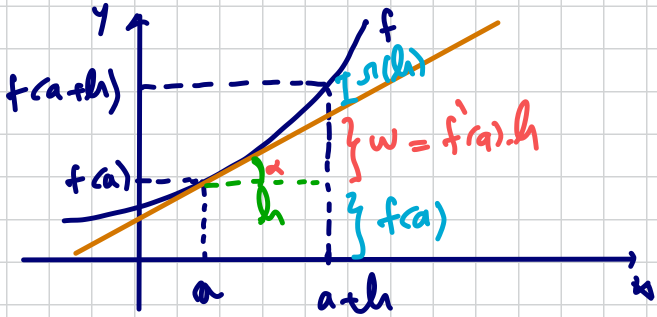
No que segue, revisitemos o conceito de diferencial a uma variável real.

Def.: Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida em um intervalo aberto I e seja $a \in I$. Dizemos que f é diferenciável em $a \in I$ se existir $L \in \mathbb{R}$ tal que, para $h \in \mathbb{R}$ tal que $a + h \in I$, pondo

$$f(a+h) = f(a) + L \cdot h + r(h),$$

então

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$



$$\tan\alpha = \frac{w}{h}$$

$$w = \underbrace{\tan\alpha}_{f'(a)} \cdot h$$

$$w = f'(a) \cdot h$$

Pelo esquema acima, temos:

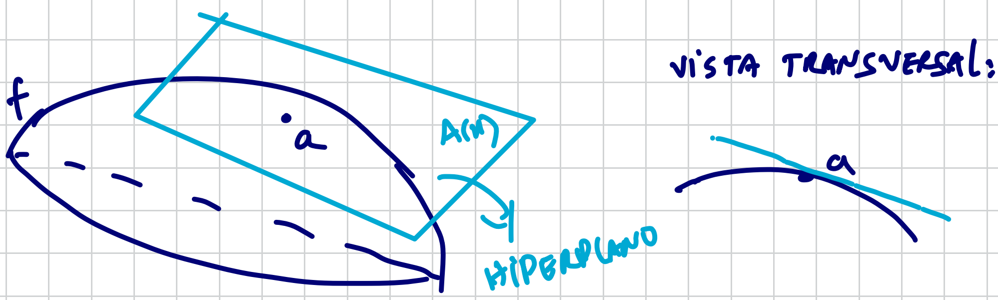
$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + r(h).$$

No caso, $L = f'(a)$ e $r(h)$ chama-se <u>resto</u>, e tende a zero mais rápido que h.

Por isso, escreve-se que $\frac{r(h)}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$

Então, o diferencial de f no ponto a, é definido por $df(a) = f'(a).h$

No caso a várias variáveis, dada uma função $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $a \in int(\Omega)$, vamos encontrar uma aproximação linear $A(x)$ em $x = a$.



Ou seja, queremos uma função afim

$$A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \text{ dada por}$$

$$A(x) = L(x) + b, \quad \text{onde}$$

$L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ será uma transformação linear, e $b \in \mathbb{R}^m$.

A função $A(x)$ deve ser uma aproximação linear para $f(x)$, numa vizinhança do ponto a, ou seja, deve-se ter:

$$A(a) = f(a) \quad \text{e} \quad A(x) \approx f(x), \text{ para } x \text{ próximo de } a.$$

Note que:

$$A(x) - A(a) = L(x) + b - (L(a) + b)$$

$$= L(x) + \cancel{b} - L(a) - \cancel{b} =$$

$$= L(x) - L(a) = L(x-a)$$

$T : V \to W$ é linear.
$T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$
$T(\alpha \vec{u}) = \alpha T(\vec{u})$

pois L é uma transformação linear.

$$A(x) - A(a) = L(x-a)$$

$$\Rightarrow A(x) = \underbrace{A(a)}_{=f(a)} + L(x-a)$$

$$\boxed{A(x) = f(a) + L(x-a)}$$

Note também que

$$\lim_{x \to a} A(x) = \lim_{x \to a} f(a) + L(x-a)$$

$$= f(a) + L(a-a)$$

$$= f(a) + \underbrace{L(0)}_{=0} = f(a)$$

pois L é transf. linear.

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} A(x) = f(a) = A(a)$$

Logo, a aproximação $A(x)$ é contínua.

Assim, redefine $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ por:

$$f(x) = f(a) + L(x-a) + \|x-a\| \cdot r(x-a);$$

onde $\|x-a\| = d(x,a)$ e $\lim_{x \to a} r(x-a) = 0$

Note que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\Big(f(a) + L(x-a) + \|x-a\| \cdot r(x-a)\Big)$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to a} f(a)}_{f(a)} + \underbrace{\lim_{x\to a} L(x-a)}_{L(0)} + \lim_{x\to a} \underbrace{\|x-a\| \cdot r(x-a)}_{\|0\| \cdot r(0) = 0}$$

$$= f(a) + \underbrace{L(0)}_{\shortparallel \atop 0} + 0 = f(a).$$

Ou seja, f é contínua em a.

Com o que se fez acima, definimos:

Def. Dizemos que $f:\Omega\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ é diferenciável em $a\in\mathbb{R}^m$ se:

(i) $a\in \mathrm{int}(\Omega)$

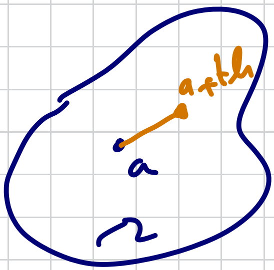
(ii) $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-L(x-a)}{\|x-a\|}=0$$

Neste caso, L é o diferencial de f no ponto a, e escrevemos $L=d_a f$.

Suponha $f:\Omega\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ diferenciável no ponto $a\in \mathrm{int}(\Omega)$. Tome $t>0$ e considere

$$x_i = a+t\cdot h\ ,\quad \text{onde } h\in\mathbb{R},$$

tal que $x_i\in \mathrm{int}(\Omega)$



Assim, temos que,

$$0=\lim_{x_i\to a}\frac{f(x_i)-f(a)-L(x_i-a)}{\|x_i-a\|}$$

$$0 = \lim_{x_i \to a} \frac{f(a+t.h) - f(a)}{\|\cancel{a}+th-\cancel{a}\|} - \lim_{x_i \to a} \frac{L(x_i - a)}{\|\cancel{a}+th-\cancel{a}\|}$$

$$0 = \lim_{x_i \to a} \frac{f(a+ht) - f(a)}{\|th\|} -$$

$d(ht, 0)$

$$- \lim_{x_i \to a} \frac{L(\cancel{a}+th-\cancel{a})}{\|t.h\|} \qquad \text{1)}$$

Note que $x_i \to a \Leftrightarrow t \to 0$. Assim:

$$\boxed{0 = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{\|th\|} - \lim_{t \to 0} \frac{L(th)}{\|th\|}}$$

Note que $\|th\| = |t|.\|h\| = t.\|h\|$, (*)

$h \in \mathbb{R}^n$. Considerando h sendo um vetor da base canônica do $\mathbb{R}^n$:

$$\{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\} \; ; \text{ onde}$$

$$e_j = (0, 0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots 0)$$

↳ 1 na posição j.

<u>Ex.:</u> no $\mathbb{R}^3$; a base canônica é:

$$\{\underbrace{(1,0,0)}_{e_1}; \underbrace{(0,1,0)}_{e_2}; \underbrace{(0,0,1)}_{e_3}\}$$

Assim, no caso onde tomamos os vetores na base canônica do $\mathbb{R}^n$, então, teremos

$$x_i = a + t \cdot e_i \qquad (h = e_i)$$

E disso, $(*)$ fica:

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot e_i) - f(a)}{\|t \cdot e_i\|} - \lim_{t \to 0} \frac{L(t \cdot e_i)}{\underbrace{\|t \cdot e_i\|}_{t}} ,$$

onde

$$\|t \cdot e_i\| = \underbrace{|t|}_{t} \cdot \underbrace{\|e_i\|} = t \cdot 1 = t$$

↳ $\|e_i\| = \sqrt{(0)^2 + 0^2 + \ldots 1^2 + \ldots 0^2}$
$= 1.$

Ou seja, obtemos:

L é linear: $L(\alpha\vec{u}) = \alpha . L(\vec{u})$

$$0 = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t} - \lim_{t\to 0} \frac{t \cdot L(e_i)}{t}$$

$$0 = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t} - L.(e_i)$$

$$\underbrace{L(e_i)}_{d_a f(e_i)} = \underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{f(a+t.e_i) - f(a)}{t}}_{= \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)}$$

conclusão: $d_a f(e_i) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Sendo $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ $\quad f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,

então $d_a f(e_i)$ será dado por:

$$d_a f(e_i) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}(a) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_i}(a) \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x_i}(a) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_i}(a) \end{bmatrix}$$

Assim, $d_a f$ será dado por:

$$\begin{array}{c} d_a f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_m} \end{bmatrix} \\ \qquad\quad m \times 1 \qquad m \times 1 \qquad\quad m \times 1 \end{array}$$

Abrindo a notação teremos:

$$d f_a = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{bmatrix}_{n \times m}$$

De forma abreviada:

$$d f_a = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \cdots & f_{1m} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \cdots & f_{2m} \\ \cdots & & & & \\ f_{n1} & f_{n2} & & \cdots & f_{nm} \end{bmatrix}_{n \times m} ;$$

onde $f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$.

Esta matriz é chamada de MATRIZ JACOBIANA.