CÁLCULO 3, TURMA T2

27/04/26 - AULA 13

DIFERENCIABILIDADE NO $\mathbb{R}^m$

No Cálculo tem-se o seguinte resultado:

PROP.: Se $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for uma função derivável em um intervalo aberto I, então f é contínua.

No que segue queremos verificar se este resultado continua valendo para funções a várias variáveis.

Por exemplo, a função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

afirmamos que f não é contínua na origem.

De fato, note que,

- $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=0}} \frac{x \cdot 0}{x^2+0^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=0}} \frac{0}{x^2} = 0$$

- $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=x}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=x}} \frac{x \cdot x}{x^2+x^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=x}} \frac{\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}} = \frac{1}{2}$$

Logo, $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, indicando que f não é contínua na origem. No entanto, as derivadas parciais na origem serão dadas por:

- $$\underline{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - \overbrace{f(0,0)}^{=0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h\cdot 0}{h^2+0^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \underline{0}$$

e

- $$\underline{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0\cdot h}{0^2+h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \underline{0}$$

<u>Conclusão</u>: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, ou seja, existem (e são iguais) as derivadas parciais na origem, mas f não é contínua na origem.

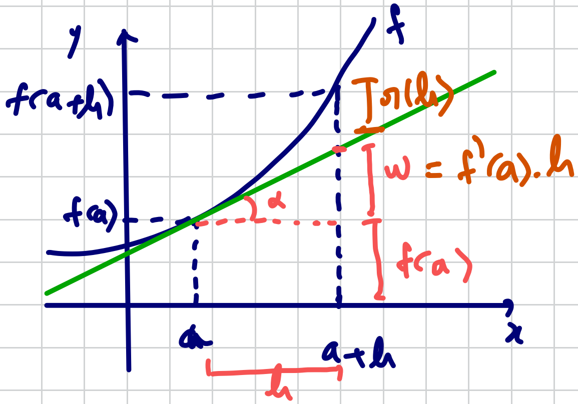
Então, parece que o resultado lembrado no início, para uma variável real, não vale a várias variáveis. No entanto, o que comparamos acima foi derivação parcial com continuidade, não derivação em si. O que vai valer a várias variáveis é o conceito de DIFERENCIABILIDADE, outrora estudado a uma variável real, deverá ser revisitado e estudado a várias variáveis reais.

Recordando do Cálculo 1: dizemos que uma função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável em $a \in \operatorname{int} I$, se, para $h \in \mathbb{R}$ tal que $a+h \in \operatorname{int}(I)$, pondo

$$f(a+h) = f(a) + L(a).h + r(h),$$

tivermos $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{r(h)}{h} = 0.$

Neste caso, $L(a) = f'(a)$; e disso, $f'(a).h$ é o diferencial de f no ponto a.



$\tan\alpha = \dfrac{w}{h}$

$w = \tan\alpha . h$

$w = f'(a).h$

$f'(a)$ – inclinação da reta tangente em a.

(além disso, a reta tangente é uma aproximação linear da função no ponto a)

$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + r(h),$$ com

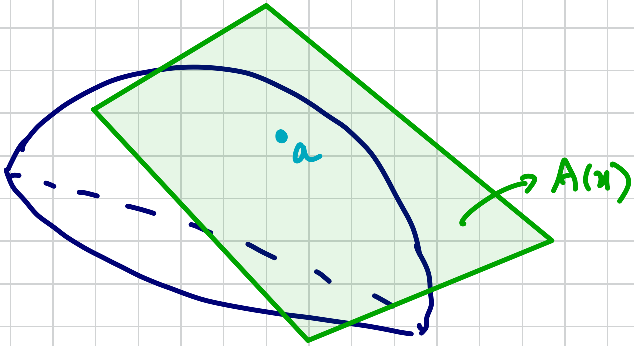
$r(h) \to 0$ mais rápido que h; ou seja,

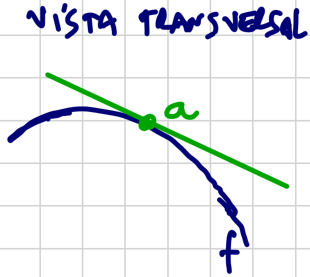
$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

O diferencial da f no ponto a é definido por:

$$d f(a) = f'(a).h.$$

Precisamos adaptar e explorar esta definição para várias variáveis. Dado $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, e seja $a \in \operatorname{int}(\Omega)$. Queremos encontrar uma aproximação linear para f no ponto a.





Esta aproximação $A : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ será dada por

$$A(x) = L(x) + b \, , \text{ onde}$$

$L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear e $b \in \mathbb{R}^n$.

Para que $A(x)$ seja realmente uma aproximação para $f(x)$ no ponto $a \in \operatorname{int}(\Omega)$, deve-se cumprir:

$A(a) = f(a)$ e numa vizinhança

No ponto A; $\quad A(x) \approx f(x)$.

Note que:

$$A(x) - A(a) = L(x) + b - (L(a) + b)$$

$$= L(x) + \cancel{b} - L(a) - \cancel{b}$$

$$= L(x) - L(a) = L(x-a)$$

pois L é uma transf. linear:

$$L(\vec{u} + \vec{v}) = L(\vec{u}) + L(\vec{v})$$

$$L(\alpha \cdot \vec{u}) = \alpha \cdot L(\vec{u})$$

$$\Rightarrow \quad A(x) - A(a) = L(x-a)$$

$$\Rightarrow \quad A(x) = \underbrace{A(a)}_{f(a)} + L(x-a)$$

$$\Rightarrow \quad A(x) = f(a) + L(x-a).$$

Note também que:

$$\lim_{x\to a} A(x) = \lim_{x\to a}\Big(f(a) + L(x-a)\Big)$$

$$= \lim_{x\to a} f(a) + \lim_{x\to a} L(x-a)$$

$$= f(a) + \underbrace{L(0)}_{=0} = f(a) = A(a)$$

pois L é transf. linear.

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} A(x) = A(a),$$

ou seja, A é contínua.

Isto posto, redefine $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ por

$$f(x) = f(a) + L(x-a) + \|x-a\| . r(x-a);$$

onde $\|x-a\| = d(x,a)$ e $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{r(x-a)}{\|x-a\|} = 0$,

com $L: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ transformação linear.

Note que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} f(a) + L(x-a) + \|x-a\| . r(x-a)$$

$$= f(a) + \underbrace{L(0)}_{0} + \underbrace{\|0\| \cdot r(0)}_{=0} = f(a)$$

Ou seja, a f assim definida é contínua.

Isto motiva definir:

<u>Def.:</u> Dizemos que $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável em $a \in \mathbb{R}^m$ se:

(i) $a \in \operatorname{int}(\Omega)$;

(ii) $$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

Neste caso, L é o diferencial de f no ponto a, e é denotado por

$$L = df_a.$$

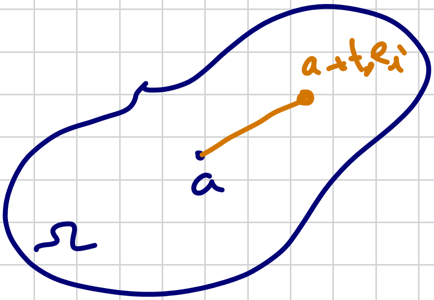
Agora, seja $a \in \operatorname{int}(\Omega)$ e considere $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^m$.

$$e_j = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots 0)$$ posição j.

Ex: $\mathbb{R}^3$: a base canônica é:

$$\{\underbrace{(1,0,0)}_{e_1};\ \underbrace{(0,1,0)}_{e_2};\ \underbrace{(0,0,1)}_{e_3}\}$$

Seja $t > 0$ tal que $x_i = a + t \cdot e_i \in \text{int}(\Omega)$.



Supondo f diferenciável no ponto a, então:

$$0 = \lim_{x_i \to a} \frac{f(x_i) - f(a) - L(x_i - a)}{\|x_i - a\|}$$

$$0 = \lim_{x_i \to a} \frac{f(x_i) - f(a)}{\|x_i - a\|} - \lim_{x_i \to a} \frac{L(x_i - a)}{\|x_i - a\|}$$

$$\lim_{x_i \to a} \frac{f(x_i) - f(a)}{\|x_i - a\|} = \lim_{x_i \to a} \frac{L(x_i - a)}{\|x_i - a\|} \quad (*)$$

$\therefore$

Como $x_i = a + t \cdot e_i$, então:

$$\|x_i - a\| = \|\cancel{a} + t\cdot e_i - \cancel{a}\| = \|t \cdot e_i\|$$

$$= \underbrace{|t|}_{t>0} \cdot \underbrace{\|e_i\|}_{\sqrt{0^2+0^2+\dots+1^2+0^2+0^2} = 1.} = t \cdot 1 = t.$$

Além disso $x_i \to a \Leftrightarrow t \to 0$

Disso, (*) fica:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+t\cdot e_1) - f(a)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{L(\cancel{a} + t\cdot e_i - \cancel{a})}{t}$$

e então:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+t\cdot e_i) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{L(t\cdot e_i)}{t}$$

$L(t\cdot e_i) = t \cdot L(e_i) \to L$ é linear

$$\underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{f(a+t\cdot e_i)-f(a)}{t}}_{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)} = \underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t}\cdot L(e_i)}{\cancel{t}}}_{L(e_i)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = L(e_i) = d_a f(e_i)$$

Sendo $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$;

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(a) \end{bmatrix}_{n\times 1} = d_a f(e_i)$$

Assim, temos:

$$d_a f = \left[\underbrace{d_a f(e_1)}_{n\times 1} \quad \underbrace{d_a f(e_2)}_{n \times 1} \quad \cdots \quad \underbrace{d_a f(e_m)}_{n\times 1} \right]_{n \times m}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_m}(a) \\[2ex] \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_3}{\partial x_2}(a) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_m}(a) \end{bmatrix}_{n \times m},$$

chamada de matriz jacobiana de f.

Uma notação mais simples: sendo

$f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$;

então:

$$d_a f = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \cdots & f_{1m} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \cdots & f_{2m} \\ - & - & - & - & - \\ f_{n1} & f_{n2} & f_{n3} & \cdots & f_{nm} \end{bmatrix};$$

onde $f_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$.

Ou seja, o que construímos foi a prova do seguinte resultado:

TEOREMA: Dizemos que $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável em $a \in \operatorname{int}(\Omega)$ se existir a matriz $L = d_a f$ dada pela matriz Jacobiana apresentada acima, e for única, nas bases canônicas.

Vejamos um exemplo:

Ex.: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (\overbrace{\operatorname{sen} xy}^{f_1}, \overbrace{x^2+y^2+z^2}^{f_2})$

Calcule df_a; onde $a \in \mathbb{R}^3$ um ponto qualquer.

Solução:

$$df_a = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \end{bmatrix}_{2\times 3}$$; onde

$$f_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{sen} xy) = y \cdot \cos xy$$

$$f_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{sen} xy) = x \cdot \cos xy$$

$$f_{13} = \frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{sen} xy) = 0$$

$$f_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2) = 2x$$

$$f_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2) = 2y$$

$$f_{23} = \frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2) = 2z$$

Logo:

$$d f_a = \begin{bmatrix} y\cos xy & x.\cos xy & 0 \\ 2x & 2y & 2z \end{bmatrix}$$

Por exemplo, para $a = (1,0,2)$; temos:

$$d f_a = \begin{bmatrix} 0.\cos 0 & 1.\cos 0 & 0 \\ 2.1 & 2.0 & 2.2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$