LISTA 06 — DETERMINANTES

04) $A_{3\times 3}$, tal que $\det A = 2$.

$$B = 2 . A^t$$

$$\det B = ?$$

$$\det B = \det(2 . A^t) \overset{(*)}{=} 2^3 . \det A^t$$

$$= 2^3 . \det A = 2^3 . 2 = 2^4 = 16$$

(*) USAMOS UMA PROPRIEDADE: $A_{n\times n}$. $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$.

$$\Rightarrow \quad \det k . A = k^n . \det A$$

---

05) Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

A é invertível $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$. Assim:

$$\det A = \left| \begin{array}{ccc} 1 & k & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{cc} 1 & k \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{array}$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

$$= 1 + 0 + 0 - 0 - 2 - 2k = -1 - 2k.$$

Assim, $\det A \neq 0 \Leftrightarrow -1 - 2k \neq 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{k \neq -\frac{1}{2}}$$

---

06) Note que A é uma matriz triangular superior. Logo, o seu determinante será dado pelo produto dos elementos da diagonal. Assim:

$$\underset{\sim}{\det A} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \underset{\sim}{1}.$$

---

07) Como $\det M \neq 0$ segue que M é inversível. Assim, $\exists\, M^{-1}$ tal que

$$M \cdot M^{-1} = I \quad e \quad M^{-1} \cdot M = I.$$

Logo, de $M \cdot N = M \cdot P$, multiplicando à esquerda por M^{-1}, vamos obter:

$$M^{-1} \cdot (M \cdot N) = M^{-1} \cdot (M \cdot P) \quad ;$$

e, pela associatividade:

$$\underbrace{(M^{-1} \cdot M)}_{I} \cdot N = \underbrace{(M^{-1} \cdot M)}_{I} \cdot P \Rightarrow \boxed{N = P.}$$

---

10) Sendo $A \cdot A^t = I$, então

$$\underbrace{\det(A \cdot A^t)}_{= \det A \cdot \det A^t} = \det I = 1$$

$\Rightarrow \det A \cdot \det A^t = 1$, e como

$\det A = \det A^t$, por teorema, segue que

$$\det A \cdot \det A = 1$$

$$\Rightarrow (\det A)^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\det A = \pm 1}$$

---

11) Aplicando o determinante na igualdade dada:

$$\det(A^t \cdot B^t) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 16 = 2$$

$-$ $+$

$$\Rightarrow \underbrace{\det A^t}_{= \det A} \cdot \underbrace{\det B^t}_{= \det B} = 2$$

$$\Rightarrow \det A \cdot \underbrace{\det B}_{= 2} = 2 \Rightarrow \det A \cdot 2 = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{\det A = 1}$$

14)

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 4 \\ x + ky + z = p \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\Delta = \left|\begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 & 2 \\ 1 & k \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$= 6k + \cancel{2} + \cancel{1} - k - \cancel{3} - 4$$

$$= 5k - 4 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\Delta = 5k - 4}$$

$$\Delta x = \left|\begin{matrix} 4 & 2 & 1 \\ p & k & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 4 & 2 \\ p & k \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

$$= 8k + \cancel{4} + p - 2k - \cancel{4} + 4p$$

$$= 6k + 5p$$

$$\Delta y = \left|\begin{matrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 & 4 \\ 1 & p \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

$$= 6p + \cancel{4} + \cancel{2} - p - \cancel{6} - 8$$

$$= 5p - 8$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & k & p \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 2 \\ 1 & k \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$= 6k + 2p + \cancel{4} - 4k - 3p - \cancel{4}$$

$$= 2k - p$$

Assim, teremos:

(a) para ser compatível e determinado, exige-se que $\Delta \neq 0$; ou seja;

$$5k - 4 \neq 0 \iff \boxed{k \neq \frac{4}{5}}$$

(b) para ser compatível indeterminado exige-se que

$$\Delta = 0; \quad \Delta x = 0; \quad \Delta y = 0; \quad \Delta z = 0.$$

Assim:

$$\Delta = 0 \iff 5k - 4 = 0 \iff \boxed{k = \frac{4}{5}}$$

$$\Delta x = 0 \iff 6k + 5p = 0 \iff 6 \cdot \frac{4}{5} + 5p = 0$$

$$\iff 24 + 25p = 0$$

$$\iff \boxed{p = -\frac{24}{25}}$$

$\Delta y = 0$ e $\Delta z = 0$ não vai precisar

(pois já achamos K e P)

(c) para ser incompatível, exige-se que

$\Delta x \neq 0$; $\Delta y \neq 0$ ou $\Delta z \neq 0$ e $\Delta = 0$

Assim, obtemos $K = \frac{4}{5}$ e $P \neq \frac{-24}{25}$.
