Fundação Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Bach. em Química e Bach. em Química Industrial
Segunda Prova de Álgebra linear e Geometria analítica
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: **Data:** 14/04/2023

Questão 01. Obtenha a inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

usando operações elementares sobre linhas.

Questão 02. As quatro energias π-elétron do trimetilenometano são da forma

$$E = \alpha - \beta x,$$

onde x é a solução do determinante de Hünckel secular

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0,$$

proveniente da fórmula química do trimetilenometano. Determine as quatro energias π-elétron, em termos de α e β.

Questão 03. Na queima do metano, o metano e o oxigênio estável reagem para formar dióxido de carbono e água. Isso fica indicado pela equação química

$$CH_4 + O_2 \longrightarrow CO_2 + H_2O.$$

Faça o balanceamento dessa equação química através de sistemas lineares, usando operações elementares sobre linhas.

Questão 04. Sendo X, Y e Z três substâncias químicas, as mesmas não estarão relacionadas por uma equação linear, e portanto serão quimicamente distintas e não poderão reagir entre si, se três vetores de concentrações dos mesmos forem L.I.; e reagirão entre si se forem L.D. Isto posto, considerando as soluções de ácido clorídrico ($HC\ell$), ácido nítrico (HNO_3) e água (H_2O), associando concentrações dessas substâncias, respectivamente, aos vetores[1] $10\vec{v}_1 = (5, 2, 3)$; $10\vec{v}_2 = (1, 3, 6)$ e $10\vec{v}_3 = (4, 5, 1)$, verifique se estas três substâncias reagem entre si ou não.

Questão 05. Dados $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0\}$ e $V = [(1, -2, 1); (1, 3, 0)]$ subconjuntos no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

(a) Mostre que W é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$. Em seguida, determine uma base para W e dê sua dimensão.

(b) Obtenha $W \cap V$ e $W + V$, indicando uma base para cada um deles e suas respectivas dimensões.

---

[1] De cada vetor, a primeira componente denota a concentração de $HC\ell$, a segunda de HNO_3 e a terceira de H_2O.

01)

$$(A \,\vdots\, I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\ell_1 \leftrightarrow \ell_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - 2\ell_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\ell_2 \leftrightarrow \ell_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\ell_2 \leftarrow -\ell_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\ell_3 \leftarrow -\frac{1}{2}\ell_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - \ell_3} \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{I} \left| \underbrace{\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array}}_{A^{-1}} \right.\right)$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2,0

02) $$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo esse determinante sobre a 1ª linha, vamos obter:

$$x \cdot A_{11} + \underbrace{0 \cdot A_{21}}_{\Rightarrow 0} + \underbrace{0 \cdot A_{31}}_{\Rightarrow 0} + 1 \cdot A_{41} = 0$$

2,0

$$x \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{41} = 0 \quad , \quad \text{ou seja:}$$

$$x \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (x^3 + 0 + 0 - x - x - 0) - 1 \cdot (0 + 0 + x^2 - 0 - 0 - 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^3 - 2x) - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 3x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2 - 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 0 \end{array}\right] \text{RAIZ DUPLA} \\ x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Assim, as quatro energias π-eléton serão:

$$E_1 = \alpha - \beta \cdot 0 \Rightarrow \boxed{E_1 = \alpha} \qquad E_2 = \alpha - \beta \cdot 0 \Rightarrow \boxed{E_2 = \alpha}$$

$$\boxed{E_3 = \alpha - \sqrt{3}\beta} \quad ; \quad \boxed{E_4 = \alpha + \sqrt{3}\beta}$$

03) $x\,CH_4 + y\,O_2 \longrightarrow w\,CO_2 + z \cdot H_2O$

$$\begin{aligned} C &: \quad x = w \\ H &: \quad 4x = 2z \\ O &: \quad 2y = 2w + z \end{aligned} \iff \begin{cases} x \quad\quad -w \quad = 0 \\ 4x \quad\quad -2z = 0 \\ 2y - 2w - z = 0 \end{cases};$$

cuja matriz aumentada será:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & w & z \end{array} \end{array} \xrightarrow{\ell_2 \leftrightarrow \ell_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\ell_2 \hookrightarrow \frac{1}{2}\ell_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_3 \hookrightarrow \ell_3 - 4\ell_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_3 \hookrightarrow \frac{1}{4}\ell_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\ell_2 \hookrightarrow \ell_2 + \ell_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_1 \hookrightarrow \ell_1 + \ell_3}$$

2,0

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x & y & w & z \end{array} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x \quad -\frac{1}{2}z = 0 \\ y \quad - z = 0 \\ w - \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} z \\ y = z \\ w = \frac{1}{2} z \end{cases}$$

Como os escalares x, y, z devem ser inteiros e positivos, para o balanceamento químico, tomando $z = 2$, teremos:

$$w = \frac{1}{2} \cdot 2 \Rightarrow w = 1$$

$$y = 2 \quad \text{e} \quad x = \frac{1}{2} \cdot 2 \Rightarrow x = 1$$

Portanto, obtemos:

$$1 \cdot CH_4 + 2 \cdot O_2 \longrightarrow 1 \cdot CO_2 + 2 \cdot H_2O.$$

---

04) Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha \cdot (5,2,3) + \beta \cdot (1,3,6) + \gamma \cdot (4,5,1) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5\alpha + \beta + 4\gamma = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + 5\gamma = 0 \\ 3\alpha + 6\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

Pela regra de Cramer:

$\Delta_\alpha = \Delta_\beta = \Delta_\gamma = 0$, pois teremos nestes determinantes uma coluna nula.

$$\Delta = \left| \begin{matrix} 5 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{matrix} =$$

$$= 15 + 15 + 48 - 36 - 150 - 2 = -110 \neq 0$$

Assim, obtemos

$$\alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta} = \frac{0}{-110} = 0$$

$$\beta = \frac{\Delta\beta}{\Delta} = \frac{0}{-110} = 0$$

$$\gamma = \frac{\Delta\gamma}{\Delta} = \frac{0}{-110} = 0$$

2,0

Logo, concluímos que os 3 vetores são L.I.; e disso, c.f. o exercício, segue que HCl, HNO_3 e H_2O não reagem entre si.

05) (a) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = -2x + y\}$

$$= \{(x, y, -2x+y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(x, 0, -2x) + (0, y, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

1,0

$$= \{x(1,0,-2) + y\cdot(0,1,1) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

$= [(1,0,-2) ; (0,1,1)]$; isto mostra que W é subespaço vetorial, gerado pelos vetores $(1,0,-2)$ e $(0,1,1)$. Como estes dois vetores são L.I., concluímos que $\dim W = 2$, onde $\{(1,0,-2); (0,1,1)\}$ é uma base para W.

(b) $W + V = [(1,0,-2); (0,1,1); (1,-2,1); (1,3,0)]$

$$(1,0,2) = \alpha(0,1,1) + \beta(1,-2,1) + \gamma\cdot(1,3,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta + \gamma = 1 \\ \alpha - 2\beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 2 \end{cases}$$

$\gamma = 1 - \beta$

$\alpha = 2 - \beta$

$$\alpha - 2\beta + 3\gamma = 0$$
$$2 - \beta - 2\beta + 3(1-\beta) = 0$$
$$2 - \beta - 2\beta + 3 - 3\beta = 0$$
$$-6\beta = -1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{6}$$

$$\left|\begin{array}{l} \alpha = 2 - \frac{1}{6} = \frac{11}{6} \\ \gamma = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow V + W = [\underbrace{(0,1,1);(1,-2,1);(1,3,0)}_{\text{são L.I. (exercício)}}]$$

$$\Rightarrow \boxed{\dim(V+W) = 3}$$

$$V = [(1,-2,1);(1,3,0)] = \{a.(1,-2,1) + b.(1,3,0) : a,b \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(\underbrace{a+b}_{x}, \underbrace{-2a+3b}_{y}, \underbrace{a}_{z}) : a,b \in \mathbb{R}\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = a+b \\ y = -2a+3b \\ z = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z+b \to b = x-z \\ y = -2z+3b \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$y = -2z + 3.(x-z)$$
$$y = -2z + 3x - 3z$$
$$\Rightarrow \boxed{3x - y - 5z = 0}$$

$$\Rightarrow V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} : 3x - y - 5z = 0\}$$

Assim, $W \cap V$ será a sol. do sistema:

2,0

$$
-\begin{cases} 3x - y - 5z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}
$$

$$
x - 6z = 0
$$

$$
\Rightarrow \boxed{x = 6z}
$$

$$
\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 2.(6z) - y + z = 0 \\ \boxed{y = 13z} \end{cases}
$$

Assim, teremos:

$$
\begin{aligned}
V \cap W &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 6z \text{ e } y = 13z\} \\
&= \{(6z, 13z, z) : z \in \mathbb{R}\} \\
&= [(6, 13, 1)]. \quad \Rightarrow \boxed{\dim(V \cap W) = 1}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \{(6, 13, 1)\}$ será uma base de $V \cap W$.