

Fundação Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Bach. em Química e Bach. em Química Industrial
Segunda Prova de Álgebra linear e Geometria analítica
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome:

Data: 14/04/2023

Questão 01. Obtenha a inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

usando operações elementares sobre linhas.

Questão 02. As quatro energias π -elétron do trimetilenometano são da forma

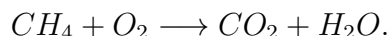
$$E = \alpha - \beta x,$$

onde x é a solução do determinante de Hünckel secular

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0,$$

proveniente da fórmula química do trimetilenometano. Determine as quatro energias π -elétron, em termos de α e β .

Questão 03. Na queima do metano, o metano e o oxigênio estável reagem para formar dióxido de carbono e água. Isso fica indicado pela equação química



Faça o balanceamento dessa equação química através de sistemas lineares, usando operações elementares sobre linhas.

Questão 04. Sendo X , Y e Z três substâncias químicas, as mesmas não estarão relacionadas por uma equação linear, e portanto serão quimicamente distintas e não poderão reagir entre si, se três vetores de concentrações dos mesmos forem L.I.; e reagirão entre si se forem L.D. Isto posto, considerando as soluções de ácido clorídrico (HCl), ácido nítrico (HNO_3) e água (H_2O), associando concentrações dessas substâncias, respectivamente, aos vetores¹ $10\vec{v}_1 = (5, 2, 3)$; $10\vec{v}_2 = (1, 3, 6)$ e $10\vec{v}_3 = (4, 5, 1)$, verifique se estas três substâncias reagem entre si ou não.

Questão 05. Dados $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0\}$ e $V = [(1, -2, 1); (1, 3, 0)]$ subconjuntos no espaço vetorial \mathbb{R}^3 .

- (a) Mostre que W é um subespaço vetorial do \mathbb{R}^3 . Em seguida, determine uma base para W e dê sua dimensão.
- (b) Obtenha $W \cap V$ e $W + V$, indicando uma base para cada um deles e suas respectivas dimensões.

¹De cada vetor, a primeira componente denota a concentração de HCl , a segunda de HNO_3 e a terceira de H_2O .

01)

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{l_2 \leftarrow l_2 - 2l_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{l_2 \leftarrow -l_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{l_3 \leftarrow -\frac{1}{2}l_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{l_1 \leftarrow l_1 - l_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array} \right)$$

I
 A^{-1}

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2, 0

$$02) \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo esse determinante sobre a 1ª linha, vamos obter:

$$x \cdot A_{11} + \underbrace{0 \cdot A_{21}}_{\neq 0} + \underbrace{0 \cdot A_{31}}_{\neq 0} + 1 \cdot A_{41} = 0$$

2,0

$$x \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{41} = 0, \text{ ou seja:}$$

$$x \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (x^3 + 0 + 0 - x - x - 0) - 1 \cdot (0 + 0 + x^2 - 0 - 0 - 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^3 - 2x) - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 3x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2 - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 0 \\ x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases} \text{ RAIZ DUPLA}$$

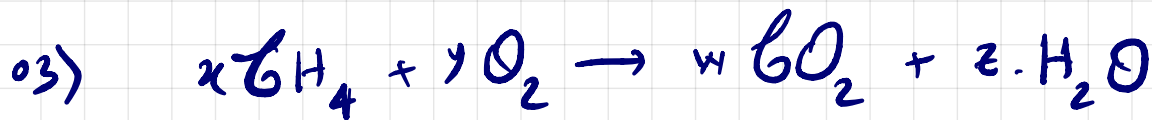
Assim, as quatro energias π -elétrons são:

$$E_1 = \alpha - \beta \cdot 0 \Rightarrow \boxed{E_1 = \alpha}$$

$$E_2 = \alpha - \beta \cdot 0 \Rightarrow \boxed{E_2 = \alpha}$$

$$\boxed{E_3 = \alpha - \sqrt{3}\beta}$$

$$\boxed{E_4 = \alpha + \sqrt{3}\beta}$$



$$\text{C}: \quad x = w$$

$$\text{H}: \quad 4x = 2z$$

$$\text{O}: \quad 2y = 2w + z$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - w = 0 \\ 4x - 2z = 0 \\ 2y - 2w - z = 0 \end{cases};$$

cuja matriz aumentada será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & w & z \end{matrix}$

$$\xrightarrow{l_2 \leftrightarrow \frac{1}{2}l_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{l_3 \leftrightarrow l_3 - 4l_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{l_3 \leftrightarrow \frac{1}{4}l_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_2 + l_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_1 + l_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2}z = 0 \\ y - z = 0 \\ w - \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$$

$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x & y & w & z \end{matrix}$

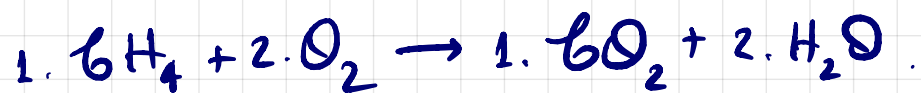
z, 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} z \\ y = z \\ w = \frac{1}{2} z \end{cases} \quad \text{Como os coeficientes } x, y, z \text{ devem ser inteiros e positivos, para o balanceamento químico, tomando } z = 2 \text{ temos:}$$

$$w = \frac{1}{2} \cdot 2 \Rightarrow w = 1$$

$$y = 2 \quad \text{e} \quad x = \frac{1}{2} \cdot 2 \Rightarrow x = 1$$

Portanto, obtemos:



04) Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha \cdot (5, 2, 3) + \beta \cdot (2, 3, 6) + \gamma \cdot (4, 5, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5\alpha + \beta + 4\gamma = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + 5\gamma = 0 \\ 3\alpha + 6\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

Dele segue de Cramer:

$\Delta_\alpha = \Delta_\beta = \Delta_\gamma = 0$, pois temos nestes determinantes uma coluna nula.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 & | & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & | & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & | & 3 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 15 + 15 + 48 - 36 - 150 - 2 = -110 \neq 0$$

Assim, obtemos

$$\alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta} = \frac{0}{-110} = 0$$

$$\beta = \frac{\Delta\beta}{\Delta} = \frac{0}{-110} = 0$$

$$\delta = \frac{\Delta\delta}{\Delta} = \frac{0}{-110} = 0$$

20

Logo, concluímos que os 3 vetores são L.I.; e disso, c.f. o exercício, segue que $H_{\beta 1}$, $H_{\alpha 2}$ e $H_{\gamma 3}$ não reagem entre si.

05) (a) $W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = -2x + y \}$

$$= \{ (x, y, -2x + y) : x, y \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ (x, 0, -2x) + (0, y, y) : x, y \in \mathbb{R} \}$$

10 $= \{ x(1, 0, -2) + y(0, 1, 1) : x, y \in \mathbb{R} \}$

$= [(1, 0, -2); (0, 1, 1)]$; isto mostra que W é subespaço vetorial, gerado pelos vetores $(1, 0, -2)$ e $(0, 1, 1)$. Como estes dois vetores são L.I.; concluímos que $\dim W = 2$, onde $\{(1, 0, -2); (0, 1, 1)\}$ é uma base para W .

(b) $W + V = [(1, 0, -2); (0, 1, 1); (1, -2, 1); (1, 3, 0)]$

$$(1, 0, 2) = \alpha(0, 1, 1) + \beta(1, -2, 1) + \delta(1, 3, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta + \delta = 1 & \rightarrow \delta = 1 - \beta \\ \alpha - 2\beta + 3\delta = 0 \\ \alpha + \beta = 2 & \rightarrow \alpha = 2 - \beta \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha - 2\beta + 3\delta &= 0 \\
 2 - \beta - 2\beta + 3(1 - \beta) &= 0 \\
 2 - \beta - 2\beta + 3 - 3\beta &= 0 \\
 -6\beta &= -1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{6}
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} \alpha - 2\beta + 3\delta &= 0 \\ 2 - \beta - 2\beta + 3(1 - \beta) &= 0 \\ 2 - \beta - 2\beta + 3 - 3\beta &= 0 \\ -6\beta &= -1 \end{aligned}} \right\}
 \begin{aligned}
 \alpha &= 2 - \frac{1}{6} = \frac{11}{6} \\
 \delta &= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V+W = [(1, 1, 1); (1, -2, 1); (1, 3, 0)]$$

São L.I. (exercício)

$$\Rightarrow \boxed{\dim(V+W) = 3}$$

$$\begin{aligned}
 V &= [(1, -2, 1); (1, 3, 0)] = \{ a \cdot (1, -2, 1) + b \cdot (1, 3, 0) : a, b \in \mathbb{R} \} \\
 &= \{ (\underbrace{a+b}_x, \underbrace{-2a+3b}_y, \underbrace{a}_z) : a, b \in \mathbb{R} \}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = a+b \\ y = -2a+3b \\ z = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z+b \rightarrow b = x-z \\ y = -2z+3b \end{cases}$$

$$y = -2z + 3(x-z)$$

$$y = -2z + 3x - 3z$$

$$\Rightarrow \boxed{3x - y - 5z = 0}$$

$$\Rightarrow V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - y - 5z = 0 \}$$

Assim, $W \cap V$ será a sol. do sistema:

20

$$\begin{array}{l}
 - \left\{ \begin{array}{l} 3x - y - 5z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{array} \right. \\
 \hline
 x - 6z = 0 \\
 \Rightarrow \boxed{x = 6z}
 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - y + z = 0 \\ 2 \cdot (6z) - y + z = 0 \end{array} \right. \\
 \boxed{y = 13z}$$

Annim, feremus:

$$V \cap W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 6z \text{ e } y = 13z \}$$

$$= \{ (6z, 13z, z) : z \in \mathbb{R} \}$$

$$= [(6, 13, 1)] .$$

$$\Rightarrow \boxed{\dim(V \cap W) = 1}$$

$\Rightarrow \{ (6, 13, 1) \}$ será uma base de $V \cap W$.