Fundação Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Bach. em Química e Bach. em Química industrial
Disciplina de Álgebra linear e Geometria analítica
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 10 de Exercícios - Transformações Lineares
Prof. Dr. Maurício Zahn

1. Mostre que a aplicação $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x, y, z) = 2x - 3y + z$ é uma transformação linear.

2. Mostre que a aplicação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x - 3y + z, x - z)$ é uma transformação linear.

3. Mostre que a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y) = (x + 1, 2y, x + y)$ não é uma transformação linear.

4. Seja V o espaço vetorial das matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$. Seja B um elemento de V e considere a aplicação $\varphi_B : V \to V$ dada por
$$\varphi_B(A) = A \cdot B - B \cdot A.$$
Mostre que φ_B é uma transformação linear.

5. Ache a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0, 0) = (2, 0)$; $T(0, 1, 0) = (1, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, -1)$. Em seguida, obtenha $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(\vec{v}) = (3, 2)$.

6. Ache a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 2) = (2, 3)$ e $T(0, 1) = (1, 4)$.

7. (Sel. Mestrado UFRGS/2007/2) Obtenha todas as transformações lineares $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tais que $L(u) = 3u$, $L(v) = 3v$ e $L(w) = 3w$, onde $u = (1, 0, 0)$, $v = (1, 1, 0)$ e $w = (0, 1, 1)$.

8. Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(-1, 1) = (3, 2, 1)$ e $T(0, 1) = (1, 1, 0)$.

9. Seja $T : V \to V$ um operador linear e C o conjunto dos vetores de V que são deixados fixos por T, ou seja,
$$C = \{\vec{v} \in V \ : \ T(\vec{v}) = \vec{v}\}.$$
Mostre que C é um subespaço vetorial de V.

10. Sejam S e T os operadores lineares em $\mathbb{R}^2$ definidos por $S(x, y) = (0, x)$ e $T(x, y) = (x, 0)$. Mostre que $ST = 0$, mas que $TS \neq 0$. Mostre também que $T^2 = T$.

11. Sendo F, G e $H \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ definidos por $F(x, y) = (x, 2y)$, $G(x, y) = (y, x + y)$ e $H(x, y) = (0, x)$, determinar $F + H$, $F \circ G$, $G \circ (H + F)$, $G \circ F$ e $H \circ F$.

12. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear dada por
$$T(x, y, z) = (x + 2y - z,\ y + z,\ x + y - 2z).$$
Determine uma base e a dimensão para o núcleo e para a imagem de T.

13. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear dado por
$$T(x, y, z) = (2x,\ 4x - y,\ 2x + 3y - z).$$

(a) Determine o núcleo e a imagem de T e suas dimensões.

(b) Calcule $T^2 = T \circ T$.

14. Sejam F e G operadores lineares de um espaço vetorial V. Mostre que $\ker G \subset \ker(F \circ G)$. Dê um exemplo onde vale a igualdade.

15. (Sel. Mestrado UFSM/2013/2) Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$, dos polinômios de graus menor ou igual a 2, e a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ determinada por $T(1,0) = 1 - t$ e $T(0,1) = 1 - t^2$.

    (a) Encontre o núcleo e a imagem da transformação T.

    (b) Esta transformação é injetiva, sobrejetiva, bijetiva? Justifique sua resposta.

16. Sejam $\alpha = \{(1,-1),(0,2)\}$ e $\beta = \{(1,0,-1),(0,1,2),(1,2,0)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente, e

$$[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

    (a) Ache T.

    (b) Se $S(x,y) = (2y, x-y, x)$, ache $[S]^{\alpha}_{\beta}$.

    (c) Ache uma base γ tal que $[T]^{\alpha}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

17. Se $[R] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $[S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, ache $R \circ S$.

18. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear cuja matriz com relação à base canônica seja

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

    (a) Determine $T(x,y,z)$.

    (b) Qual é a matriz do operador T com relação à base $\beta = \{(-1,1,0),(1,-1,1),(0,1,-1)\}$?

    (c) O operador T é invertível? Justifique.

19. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y,z) = (z, x-y, -z)$

    (a) Determine uma base do núcleo de T.

    (b) Dê a dimensão da imagem de T.

    (c) T é sobrejetora? Justifique.

    (d) Faça um desenho para $\ker T$ e $\operatorname{Im} T$.

20. Determine a representação matricial de cada um dos seguintes operadores do $\mathbb{R}^2$ em relação às bases indicadas:

    (a) $F(x,y) = (2x, 3y - x)$ e base canônica.

    (b) $F(x,y) = (3x - 4y, x + 5y)$ e base $\beta = \{(1,2),\ (2,3)\}$.