Universidade Federal de Pelotas
Curso de Lic. em Matemática
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 08 de exercícios - Derivação parcial

1. Calcule, de acordo com a definição, as derivadas parciais de cada função a seguir.

   (a) $f(x,y) = 3x^2 - 4xy + 3$ (b) $f(x,y) = \sqrt{xy-1}$ (c) $f(x,y) = \ln(x^2y^2 - 3xy)$

2. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Calcule $f_1(0,0)$ e $f_2(0,0)$.

3. Dada a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \ \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$, mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$, $\forall y$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$, $\forall x$.

4. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de cada função abaixo.

   (a) $f(x,y) = e^{x^2-3xy} \tan \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (b) $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}} \ln \dfrac{x^2}{y}$

   (c) $f(x,y) = \arctan \sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$ (d) $f(x,y) = \ln \dfrac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}$

   (e) $f(x,y,z) = xyz + xy\cos yz + e^{\sqrt{x^2y-z^3}}$ (f) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

5. Dada a função $w = x^2y + y^2z + z^2x$, prove que
$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = (x+y+z)^2.$$

6. Ache a inclinação da reta tangente à curva de interseção da superfície $36x^2 - 9y^2 + 4z + 36 = 0$ com o plano $x = 1$ no ponto $P(1, \sqrt{12}, -3)$. Interprete essa inclinação como uma derivada parcial.

7. Ache a inclinação da reta tangente à curva de interseção da superfície $z = x^2 + y^2$ com o plano $y = 1$, no ponto $P(2,1,5)$. Faça um esboço e interprete essa inclinação como uma derivada parcial.

8. Ache as equações da reta tangente à curva de interseção da superfície $x^2+y^2+z^2 = 9$ com o plano $y = 2$, no ponto $P(1,1,2)$.

9. A lei dos gases ideais para um gás confinado é dada por $PV = kT$, onde P é a presão, expressa em newtons por metro quadrado, V é o volume, exptesso em metros cúbicos, T for a temperatura, em graus, e k uma constante de proporcionalidade. Mostre que
$$\frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial V} = -1.$$

10. Definimos o *laplaciano* de uma função $f(x, y)$ por

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Dizemos que uma função f à várias variáveis é *harmônica* se $\Delta f = 0$. Verifique se as funções a seguir são harmônicas.

(a) $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$
(b) $f(x, y) = e^{-2y} \cos 2x$
(c) $f(x, y) = e^{x+y} \cos(x - y)$
(d) $f(x, y) = (x + y) \ln(x + y)$

11. Mostre que a função f dada por $f(x, y) = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$ é harmônica.

12. Dada a função $z = x^4 + \sin(x + y) - y \ln x$, mostre que

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} - 2\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{1}{x^2}.$$

13. Se $z = \sqrt{y + ax} + \arctan(y - ax)$, verifique que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

14. Se $z = x^2 y^3$, mostre que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.