Fundação Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Bach. em Química e Bach. em Química industrial
Disciplina de Álgebra linear e Geometria analítica
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 08 de Exercícios - Vetores L.I. e L.D. Base e dimensão.

1. Escreva a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ como uma combinação linear das matrizes

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Considere o espaço vetorial $P_2 = \{at^2+bt+c\ : a,b,c \in \mathbb{R}\}$ e os vetores $p_1 = t^2-2t+1$, $p_2 = t+2$ e $p_3 = 2t^2 - t$.
   (a) Escreva o vetor $p = 5t^2 - 5t + 7$ como combinação linear de p_1, p_2 e p_3.
   (b) Determine uma condição para a, b e c de modo que o vetor at^2+bt+c seja uma combinação linear de p_2 e p_3.
3. Os vetores $\vec{u}_1 = (1,1,2,4)$, $\vec{u}_2 = (2,-1,-5,2)$, $\vec{u}_3 = (1,-1,-4,0)$ e $\vec{u}_4 = (2,1,1,6)$ do $\mathbb{R}^4$ são L.I. ou L.D. ?
4. Mostre que o conjunto de vetores $\{1+x;\ 3x+x^2;\ 2+x-x^2\}$ é um conjunto linearmente independente em P_2.
5. Se $\beta = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é um conjunto de vetores L.I. de um espaço vetorial V, prove que o conjunto $\{\vec{u}-\vec{v}, \vec{u}+\vec{w}, 2\vec{u}-\vec{v}+2\vec{w}\}$ também é L.I.
6. Se $\beta = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é um conjunto de vetores L.I. de um espaço vetorial V, prove que o conjunto $\{2\vec{u}-\vec{v}+\vec{w},\ \vec{u}+2\vec{v}-3\vec{w},\ 3\vec{u}-4\vec{v}+5\vec{w}\}$ é L.D.
7. Mostre que, se u, v e w são vetores LI, então $u+v$, $u+w$ e $v+w$ também são LI.
8. Quais dos seguintes conjuntos formam uma base para $\mathbb{R}^3$?
   (a) $\{(1,1,-1);(2,-1,0);(3,2,0)\}$ (b) $\{(1,0,1);(0,-1,2);(-2,1,-4)\}$
   (c) $\{(2,1,-1);(-1,0,1);(0,0,1)\}$ (d) $\{(1,2,3);(4,1,2)\}$
9. Mostrar que os vetores $\overrightarrow{u} = (1,1,1)$, $\overrightarrow{v} = (1,2,3)$, $\overrightarrow{w} = (3,0,2)$ e $\overrightarrow{s} = (2,-1,1)$ geram o $\mathbb{R}^3$ e encontrar uma base dentre estes vetores.
10. Mostre que $\mathbb{R}^3 = [(1,1,1);\ (1,1,0);\ (0,1,1)]$.
11. Mostre que $P_3 = [x^2+x^3;\ x;\ 2x^2+1;\ 3]$.
12. Mostre que os polinômios $1-t^3$, $(1-t^2)$, $1-t$ e 1 geram o espaço vetorial dos polinômios de grau ≤ 3.
13. Seja $V = \mathbb{R}^3$ e o conjunto $\beta = \{(0,1,1);(1,1,0);(1,2,1)\} \subset \mathbb{R}^3$.
    (a) Mostre que β não é uma base para $\mathbb{R}^3$.
    (b) Determine uma base para $\mathbb{R}^3$ que possua dois elementos de β.

14. (a) Um certo espaço vetorial V é gerado por cinco vetores LI. O que se pode dizer sobre a dimensão de V?

    (b) Um certo espaço vetorial V é gerado por cinco vetores LD. O que se pode dizer sobre a dimensão de V?

15. Ache uma base e a dimensão do subespaço $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ do $\mathbb{R}^3$.

16. Sejam $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2z = 0$ e $y = -z\}$ e $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 3y + 4z = 0\}$ subespaços do $\mathbb{R}^3$. Determine $W + V$, $W \cap V$ e suas dimensões.

17. No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ consideremos os seguintes subespaços:
$S = [(1, -1, 2); (2, 1, 1)]$; $T = [(0, 1, -1); (1, 2, 1)]$; $U = \{(x, y, z) : x+y = 4x-z = 0\}$ e $V = \{(x, y, z) : 3x - y - z = 0\}$. Determine as dimensões de S, T, U, V, $S + T$ e $S \cap T$.

18. Sejam S, T subespaços do $\mathbb{R}^4$ dados por

$$S = [(1, -1, 2, 3); (1, 1, 2, 0); (3, -1, 6, -6)]$$

e

$$T = [(0, -2, 0, -3); (1, 0, 1, 0)].$$

Determine as dimensões de S, T e $S \cap T$.