Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Cálculo III
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 07 de Exercícios - Derivadas de funções vetoriais. Comprimento de arco

1. Calcule a derivada de cada função abaixo:

   (a) $\vec{f}(t) = (\arctan t\sqrt{t}, \ln(1-2t), t^2 - t^3)$

   (b) $\vec{f}(t) = \left(\dfrac{t}{3t-2}, \sqrt{\dfrac{t}{1+2t}}\right)$

2. Em cada item a seguir, encontrar o vetor tangente unitário para a curva dada no instante t apresentado.

   (a) $\vec{f}(t) = (t+1)\vec{i} - t^2\vec{j} + (1-2t)\vec{k}$, em $t = 1$.

   (b) $\vec{f}(t) = e^t \cos t\vec{i} + e^t \sin t\vec{j} + e^t\vec{k}$, em $t = 0$.

3. Mostre que se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tem derivada e $g'(t) = 0$ para $a < t < b$, então $g(t)$ é um vetor constante neste intervalo. [Sugestão: aplique o Teorema do Valor Médio a cada função coordenada.]

4. Determinar o vetor tangente ao hodógrafo[1] das seguintes funções vetoriais, nos seguintes pontos indicados:

   (a) $\vec{f}(t) = (t, t^2, t^3)$, $P(-1, 1, 1)$.

   (b) $\vec{f}(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $P(1, 0, \frac{\pi}{2})$.

   (c) $\vec{f}(t) = (2t, \ln t, 2)$, $P(2, 0, 2)$.

   (d) $\vec{f}(t) = (e^t, e^{-t}, t^2 + 1)$, $P(1, 1, 1)$.

5. Mostre que o hodógrafo de $\vec{f}(t) = (\frac{1}{2} \operatorname{sen} t, \frac{1}{2} \cos t, \frac{\sqrt{3}}{2})$ está sobre a esfera unitária com centro na origem. Determine um vetor tangente a essa curva, no ponto $P(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

6. Seja $\vec{r}(t) = 2\cos \omega t\vec{i} + 4 \sin \omega t\vec{j}$, onde ω é uma constante não nula. Mostre que
$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\omega^2\vec{r}.$$

7. Se $\vec{f}$ é uma função vetorial derivável e $h(t) = |\vec{f}(t)|$, mostre que
$$\vec{f}(t) \cdot \vec{f}'(t) = h(t) \cdot h'(t).$$

8. Sejam $f(t)$ uma função escalar duas vezes derivável e $\vec{u}, \vec{v}$ dois vetores constantes. Mostre que se $\vec{g}(t) = \vec{u} + \vec{v}f(t)$, então $\vec{g}'(t) \times \vec{g}''(t) = \vec{0}$.

9. Determinar o comprimento de arco das seguintes curvas:

   (a) $\vec{f}(t) = (e^t \cos t,\ e^t \sin t,\ e^t)$, $0 \le t \le 1$.

   (b) $\vec{f}(t) = (2t^3,\ 2t,\ \sqrt{6}t^2)$, $0 \le t \le 3$.

   (c) $\vec{f}(t) = t\vec{i} + \sin t\vec{j} + (1 + \cos t)\vec{k}$, $0 \le t \le 2\pi$.

   (d) $\vec{f}(t) = (6t^2, 4\sqrt{2}t^3, 3t^4)$, $-1 \le t \le 2$ Resp.: 81

[1] Chama-se *hodógrafo* o gráfico de uma função vetorial.