

calcule a derivada das funções:

(a) $y = x \cdot \sin(1-2x)$

(b) $y = \sqrt[3]{\cos 7x}$

Solução: (a) $y = x \cdot r \Rightarrow y' = u \cdot r' + r \cdot u'$

$$u = x \rightarrow u' = 1$$

$$r = \sin(1-2x) \rightarrow r' = \cos(1-2x) \cdot (-2)$$

$$\downarrow \Rightarrow r' = -2 \cos(1-2x)$$
$$(\sin w)' = \cos w \cdot w'$$

Portanto, obtenemos:

$$y' = u \cdot r' + u' \cdot r$$

$$y' = x \cdot (-2 \cos(1-2x)) + 1 \cdot \sin(1-2x)$$

$$y' = -2x \cos(1-2x) + \sin(1-2x)$$

$$(b) \quad y = \sqrt[3]{\cos 2x} = (\cos 2x)^{\frac{1}{3}}$$

$$y = r^k \Rightarrow y' = k \cdot r^{k-1} \cdot r'$$

$$k = \frac{1}{3}$$

$$r = \cos 2x$$

$$(\cos w)' = -\sin w \cdot w'$$

$$y' = \frac{1}{3} \cdot (\cos 2x)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (\cos 2x)'$$

$$y' = \frac{1}{3} \cdot (\cos 2x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-\sin 2x) \cdot 2$$

$$y' = -\frac{2}{3} \frac{\sin 2x}{(\cos 2x)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-2 \sin 2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(\cos 2x)^2}}$$

No final da aula vamos apresentar o significado físico da derivada: sendo $x(t)$ a função que descreve o deslocamento de um móvel ao longo do tempo, a velocidade será dada por:

$$v(t) = x'(t). ;$$

e a aceleração $a(t)$ será dada por

$$a(t) = v'(t).$$

Vamos resolver outros exemplos. (Lista 04)

8. O deslocamento, em metros, de uma partícula movendo-se ao longo de uma reta é dado pela equação do movimento $s = \frac{1}{t^2}$, onde t é medido em segundos. Encontre a velocidade da partícula nos instantes $t = 1$ s, $t = 2$ s e $t = 3$ s.

$$s(t) = \frac{1}{t^2} = t^{-2} \quad \begin{array}{l} s: \text{(metros)} \\ t: \text{segundos.} \end{array}$$

achar: $v(1)$; $v(2)$; $v(3)$.

∴ Logo: $v(t) = s'(t).$

$$v(t) = s'(t) = (t^{-2})' = -2 \cdot t^{-2-1} \cdot 1 = \dots = -2t^{-3}$$

$$(x^k)' = k \cdot x^{k-1} \cdot x$$

$$\Rightarrow \boxed{v(t) = -\frac{2}{t^3}}$$

Disto, obtenemos:

$$v(1) = -\frac{2}{(1)^3} = -2 \text{ m/s}$$

$$v(2) = -\frac{2}{(2)^3} = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4} \text{ m/s}$$

$$v(3) = -\frac{2}{(3)^3} = -\frac{2}{27} \text{ m/s}.$$

Outras regras de derivação:

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSA:

$$y = \arcsen x \Rightarrow y' = ?$$

Note que $y = \arcsen x \Leftrightarrow x = \sen y$

(lembra-se da Trigonometria:

$$\sen \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} = \arcsen\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

sendo $x = \sen y$, onde $x = x(y)$; $y = y(x)$;

derivando em x , vem:

$$x' = \cos y \cdot y'$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = \frac{n'}{\cos y}}$$

Da relação trigonométrica fundamental:

$$\sin^2 w + \cos^2 w = 1, \text{ tem:}$$

$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1 \Rightarrow \cos^2 y = 1 - \sin^2 y$$

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y},$$

sendo $\sin y = n$, segue que $\cos y = \sqrt{1 - n^2}$

Logo, tem-se que:

$$y' = \frac{n'}{\cos y} = \frac{n'}{\sqrt{1 - n^2}}$$

conclusão: $y = \arcsen n \Rightarrow y' = \frac{n'}{\sqrt{1 - n^2}}.$

Ex.: Derivar: $y = \arcsen(x - x^2)$

solução: $n = x - x^2 \Rightarrow n' = 1 - 2x$

Assim:

$$y' = \frac{n'}{\sqrt{1 - n^2}} = \frac{1 - 2x}{\sqrt{1 - (x - x^2)^2}}.$$

Analogamente se podem deduzir as demais fórmulas dos trigonométricos inversos, que poderão ser consultados no formulário.

Ex.: $y = \ln(\operatorname{arctan}(x^2-1))$. $y' = ?$

$$y = \ln w \Rightarrow y' = \frac{w'}{w}$$

$$w = \operatorname{arctan} r \Rightarrow w' = \frac{r'}{1+r^2}$$

$$\text{onde } r = x^2 - 1 \Rightarrow r' = 2x$$

$$\Rightarrow w' = \frac{2x}{1+(x^2-1)^2} = \frac{2x}{1+x^4-2x^2+1}$$

$$\Rightarrow w' = \frac{2x}{x^4-2x^2+2}$$

Assim:

$$y' = \frac{w'}{w} = \frac{\frac{2x}{x^4-2x^2+2}}{\operatorname{arctan}(x^2-1)} = \frac{2x}{(x^4-2x^2+2)\operatorname{arctan}(x^2-1)}$$

$$y = \arcsin \sqrt{x}.$$

$$y' = ?$$

$$y = \arcsin u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$u = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow u' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} \cdot 1$$

$$u' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Answer:

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}} //$$

DERIVAÇÃO IMPLÍCITA:

Quando a função não está com a variável independente isolada, ou seja, quando não está na forma explícita $y = f(x)$, ela é dita estar definida implicitamente.

EXEMPLOS:

$y = 3x^2 - 4 \cos(x+1)$ — esta função está na forma explícita $y = f(x)$

$x^2 + y^2 = x - \sqrt{y}$ — esta é na forma implícita.

Como derivar uma função definida implicitamente? Basta considerar $y = y(x)$ e derivar toda a igualdade, isolando y' no final. Vejamos exemplos:

$$(a) \quad x^2 + y^2 = x \cdot y \quad . \quad y' = ?$$

Solução: derivando em x toda a igualdade,

tem:

$$2x + 2y \cdot y' = x \cdot y' + 1 \cdot y$$

$$\Rightarrow 2y \cdot y' - x y' = y - 2x$$

$$y' (2y - x) = y - 2x$$

$$\Rightarrow y' = \frac{y - 2x}{2y - x}$$

$$(b) \quad \ln(x^2 - y^2) = \sqrt{x+y} - x^2 \quad . \quad y' = ?$$

Derivando em x , tem: $\sqrt{x+y} = (x+y)^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{(x^2 - y^2)'}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2} (x+y)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (1+y') - 2x$$

$$\frac{2x - 2y \cdot y'}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2 \sqrt{x+y}} (1+y') - 2x$$

$$\frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2} \cdot y' = \frac{1}{2\sqrt{x+y}} + \frac{1}{2\sqrt{x+y}} \cdot y' - 2x$$

$$\left(-\frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{1}{2\sqrt{x+y}} \right) y' = \frac{1}{2\sqrt{x+y}} - 2x - \frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+y}} - 2x - \frac{2x}{x^2+y^2}}{-\frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{1}{2\sqrt{x+y}}}$$

(c) $x^2 + y^2 = x - y$. $y' = ?$

Derivando em x , vem: $(y = y(x))$

$$2x + 2y \cdot y' = 1 - y'$$

$$2y \cdot y' + y' = 1 - 2x$$

$$y' (2y + 1) = 1 - 2x \Rightarrow y' = \frac{1 - 2x}{1 + 2y}$$