DIFERENCIABILIDADE EM $\mathbb{R}^m$

28/04/23

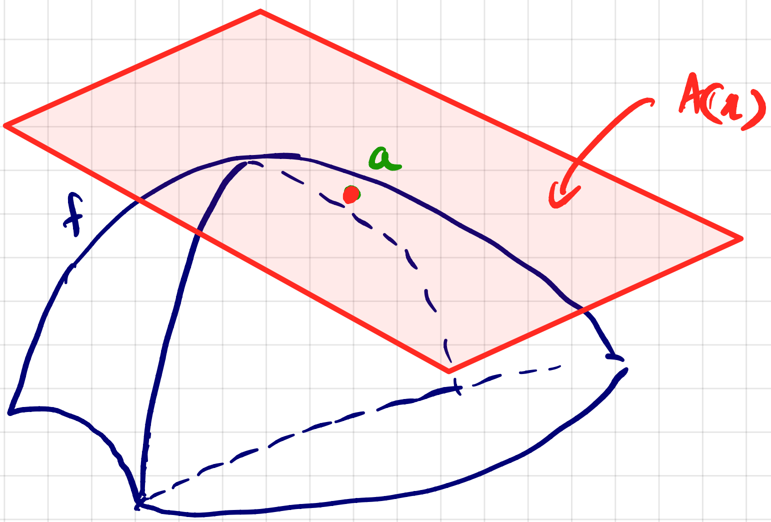
Seja $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função, e $a \in \mathbb{R}^m$.

A ideia da diferenciabilidade no $\mathbb{R}^m$ será análoga à ideia na reta, ou seja, vamos aproximar a função f, numa vizinhança do ponto $a \in \mathbb{R}^m$, por uma função afim $A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$;

$$\boxed{A(x) = L(x) + b},$$ onde $L: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear. (i.e., vamos aproximar $f(x)$ numa vizinhança do ponto a por um hiperplano descrito pela função afim $A(x)$).

Para tanto, para $A(x)$ representar uma aproximação de f no ponto a, precisamos impor a condição:

$$A(a) = f(a)$$



Escreva $A(x) - A(a)$:

$$A(x) - A(a) = L(x) + \cancel{b} - (L(a) + \cancel{b})$$

$$\Rightarrow \quad A(x) - A(a) = L(x) - L(a)$$

Como impomos $A(a) = f(a)$, e observando que L é uma transformação linear, temos:

$$A(x) - f(a) = L(x-a)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A(x) = f(a) + L(x-a)}$$

Para que A seja uma aproximação para f devemos impor que

$$\lim_{x \to a} \left(f(x) - A(x)\right) = 0$$

Ou seja:

$$\lim_{x \to a} f(x) - f(a) - L(x-a) = 0$$

Como L é transformação linear, então L é contínua, e daí

$$\underbrace{\lim_{x \to a} \left(f(x) - A(x)\right)}_{0} = \lim_{x \to a} f(x) - f(a) - L(x-a)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \lim_{x \to a} f(x) - f(a) - \lim_{x \to a} L(x-a)$$

$$\Rightarrow 0 = \lim_{x \to a} \left(f(x) - f(a)\right) - \underbrace{L(0)}_{\substack{\| \\ 0,\ \text{pois } L \text{ é} \\ \text{linear.}}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \left(f(x) - f(a)\right) = 0$$

Ou seja, f fica contínua em $x = a$.

Redefina f escrevendo

$$\boxed{f(x) = f(a) + L(x-a) + \|x-a\| \cdot r(x-a)}, \quad (*)$$

onde $r(x-a) \to 0$ mais rápido que $\|x-a\|$, i.e.,

$$\lim_{x \to a} \frac{r(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

Assim, de $(*)$, temos:

$$f(x) - f(a) - L(x-a) = \|x-a\| \cdot r(x-a)$$

$$\Rightarrow f(x) - \left(\underbrace{f(a) + L(x-a)}_{A(x)}\right) = \|x-a\| \cdot r(x-a)$$

$$\Rightarrow f(x) - A(x) = \|x-a\| \cdot r(x-a)$$

Dividindo por $\|x-a\|$, vem:

Obs.: $\|x-a\| = \sqrt{(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 + \cdots + (x_m-a_m)^2}$

$$\frac{f(x) - A(x)}{\|x-a\|} = r(x-a)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - A(x)}{\|x-a\|} = \lim_{x \to a} r(x-a) = 0$$

Ou seja, acabamos de mostrar que:
se $A(x)$ é uma aproximação para f em $x = a$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) \overbrace{- f(a) - L(x-a)}^{-A(x)}}{\|x-a\|} = 0$$

Isto vai dar origem à seguinte definição:

__Def:__ Dizemos que $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é __DIFERENCIÁVEL__ em $a \in \mathbb{R}^m$ se:

(i) $a \in \operatorname{int}(D_f)$

(ii) $\exists\ L: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ transformação linear

tal que $$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

Neste caso, dizemos que L é a diferencial de f no ponto a, e denotaremos por $L = d_a f$

Note então que a diferencial L de uma função $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ em um ponto é uma transformação linear $L: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Logo, vai existir uma matriz $[L]_{n \times m}$.

Seja $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ base canônica do $\mathbb{R}^m$, onde

$$e_j = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{posição } j}, 0, 0, \dots, 0).$$

Tome $t \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeno tal que

$$x_i := a + t \cdot e_i \in \operatorname{int}(Df), \quad i \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Então, pela def. de diferenciabilidade aplicada no ponto x_i, teremos:

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_i) - f(a) - L(x_i - a)}{\| x_i - a \|} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_i) - f(a) - L(\cancel{a} + t e_i - \cancel{a})}{\| \cancel{a} + t \cdot e_i - \cancel{a} \|}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_i) - f(a) - L(t \cdot e_i)}{t \cdot 1} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_i) - f(a)}{t} - \frac{\cancel{t} \cdot L(e_i)}{\cancel{t}}$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{f(a_i)-f(a)}{t} = \underbrace{L}_{d_a f}(e_i) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{NOTAÇÃO}}}{=} d_a f(e_i)$$

$\Downarrow$

$$\underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_i)-f(a)}{t}}_{\substack{\| \\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)}} = d_a f(e_i)$$

$\downarrow$

COLUNA i DE UMA MATRIZ QUE REPRESENTA $d_a f = L$

Sendo $f = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_n)$, $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$;

então

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(a) \end{bmatrix}.$$

Logo, a diferencial de f em a, $d_a f$, possui, nas bases canônicas de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, a seguinte representação matricial:

$$
d_a f = \begin{bmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(a) \\
\frac{\partial f_3}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(a) & \cdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \\
\frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(a)
\end{bmatrix}_{n \times m},
$$

e é chamada de MATRIZ JACOBIANA $d_a f$ do diferencial de f no ponto a.

Ou seja, acabamos de provar o seguinte teorema:

TEOREMA: Se $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ for diferenciável em um ponto $a \in \text{int}(D(f))$, então, existe uma representação matricial única do seu diferencial $d_a f$, nas bases canônicas, dada pela matriz Jacobiana de f no ponto a.

Obs: A unicidade dessa representação fica garantida pela unicidade da representação de uma transf. linear, matricialmente.

Ex.: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$;

$$f(x,y,z) = \Big(\overbrace{z^2 \cdot \operatorname{sen}(xy)}^{f_1} \,;\, \overbrace{e^{x^2+y^2+z^2}}^{f_2}\Big)$$

Ache a matriz $d_a f$ (jacobiana)

Solução: Dado $a = (x,y,z)$, então

$$d_a f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$= \begin{bmatrix} y \cdot z^2 \cdot \cos(xy) & x\, z^2 \cos(xy) & 2z \cdot \operatorname{sen}(xy) \\ 2x \cdot e^{x^2+y^2+z^2} & 2y \cdot e^{x^2+y^2+z^2} & 2z \cdot e^{x^2+y^2+z^2} \end{bmatrix}$$