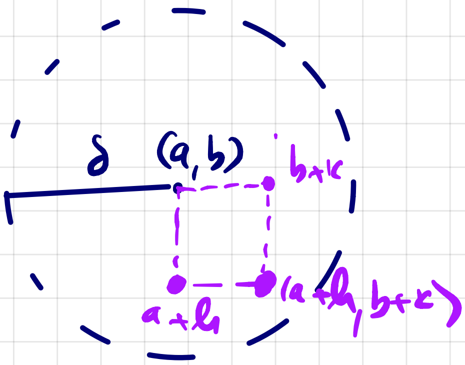
26/04/23

**TEOREMA DE SCHWARZ:** Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função, $P_0(a,b)$ um ponto de acumulação, $f$ possuindo as derivadas parciais $f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx}$ contínuas numa $V_\delta$ vizinhança do ponto $P_0$. Então,

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b).$$

**DEMONSTR.:** Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $P_0(a,b)$ e $\delta > 0$ tal que as derivadas parciais $f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx}$ sejam contínuas em

$$V_\delta(a,b) = B_\delta(a,b)$$




Sejam $h, k \in \mathbb{R}$ tais que $(a+h, b+k) \in B_\delta(P_0)$

Defina $\boxed{g(x) = f(x, b+k) - f(x, b)}$ (I)

Note que $g$ é derivável e cont. pois $f$ o é.

Então, pelo T.V.M. segue que existe $c_0$ entre $a+h$ e $a$ tal que

$$g(a+h) - g(a) = (\cancel{a} + h - \cancel{a}) \cdot g'(c_0)$$

**T.V.M.**
$g$ cont. em $[a,b]$
e deriv. em $(a,b)$
$\Rightarrow \exists\, c$ entre $a$ e $b$
tal que
$g(b) - g(a) = (b-a)\, g'(c)$

$$\Rightarrow \quad g(a+h) - g(a) = h \cdot g'(c_0)$$

$$\underset{\text{por (I)}}{=} h \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} f(c_0, b+k) - \frac{\partial}{\partial x} f(c_0, b) \right)$$

Defina $u(y) = \frac{\partial}{\partial x} f(c_0, y)$, e, pelo T.V.M, segue que $\exists\, d_0$ entre $b$ e $b+k$ tal que

$$u(b+k) - u(b) = (\cancel{b} + k - \cancel{b}) \cdot u'(d_0)$$

$$= k \cdot u'(d_0) = k \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} f(c_0, y) \right) \Bigg|_{y=d_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(b+k) - u(b) = k \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(c_0, d_0)} \quad (\text{II})$$

Como

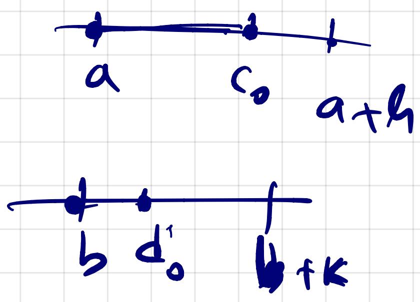
$$g(a+h) - g(a) = h \cdot \left( \overbrace{\frac{\partial}{\partial x} f(c_0, b+k)}^{u(b+k)} - \overbrace{\frac{\partial}{\partial x} f(c_0, b)}^{u(b)} \right)$$

$$= h \cdot ( u(b+k) - u(b) ) \underset{\text{por (II)}}{=}$$

$$= h \cdot k \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(c_0, d_0)$$

Como $c_0$ está entre $a$ e $a+h$ e $d_0$ está entre $b$ e $b+k$, sejam $\theta_1, \theta_2 \in [0,1]$ tais que

$$\begin{cases} c_0 = a + \theta_1 . h \\ d_0 = b + \theta_2 . k \end{cases}$$




Assim, podemos escrever:

$$\boxed{g(a+h) - g(a) = h.k.\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(a+\theta_1 . h, b+\theta_2 . k)}$$

De (I), vem: $g(a+h) = f(a+h, b+k) - f(a+h, b)$

e $g(a) = f(a, b+k) - f(a,b)$;

e disso, temos:

$$\left[f(a+h, b+k) - f(a+h, b)\right] - \left[f(a, b+k) - f(a,b)\right] =$$

$$= h.k.\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k)$$

Divida por $k \neq 0$:

$$\left[\frac{f(a+h, b+k) - f(a+h, b)}{k}\right] - \left[\frac{f(a, b+k) - f(a,b)}{k}\right] =$$

$$= \frac{h.\cancel{k}}{\cancel{k}}.\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k)$$

Fazendo $k \to 0$, obteremos:

$$\frac{\partial}{\partial y} f(a+h, b) - \frac{\partial}{\partial y} f(a, b) = h \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(a+\theta_1 h, b)$$

Divido por $h \neq 0$ :

$$\frac{\frac{\partial}{\partial y} f(a+h, b) - \frac{\partial}{\partial y} f(a, b)}{h} = \frac{\cancel{h} \cdot}{\cancel{h}} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(a+\theta_1 h, b)$$

Fazendo $h \to 0$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(a, b)\right) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(a, b)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(a, b) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(a, b)}$$

$\square$

Obs.: Este resultado se aplica para mais variáveis, desde que as derivadas sejam todas cont.

Ex.: $f(x, y, z) = x^2 y^3 \operatorname{sen}(z)$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) = 2x\, y^3 \operatorname{sen} z$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} f\right) = 2x\, y^3 \cdot \cos z$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial x} f\right) = 6xy^2\cos z$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x} = 6xy^2\cos z}$$

Por outro lado: dada $f(x,y,z) = x^2y^3 . \operatorname{sen} z$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^2y^3 . \cos z$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 3x^2y^2\cos z$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right) = 6xy^2\cos z}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x}$$

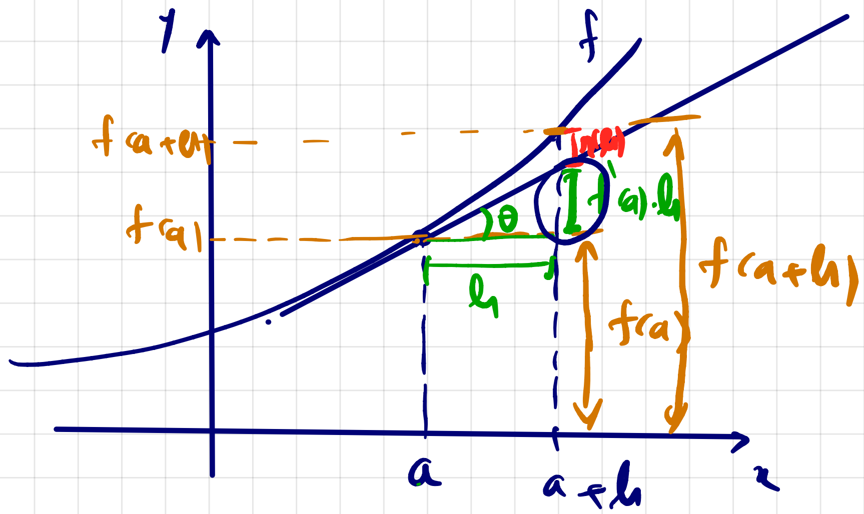
# DIFERENCIABILIDADE EM $\mathbb{R}^m$

Recordando do Cálculo I, sendo $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in A'$. Dizemos que $f$ é diferenciável em $a$, se $\exists\, L \in \mathbb{R}$ tal que, $\forall h \in \mathbb{R}: a+h \in A$;

$$f(a+h) = f(a) + L.h + r(h), \quad \text{onde}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

Ou seja, no ponto $a \in A$ estamos aproximando a função $f$ por uma função afim $L.h + f(a)$.




$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + r(h), \quad \text{onde}$$

$$\frac{r(h)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

Então, a diferencial de $f$ em $a$, $d_a f$ será $f'(a).h$

Queremos encontrar um conceito para funções $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ que seja equivalente ao conceito recordado acima, do cálculo I.

Além disso, lembre que, para uma função de uma variável real, tínhamos o resultado de que, se $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ for derivável em $x_0 \in (a,b)$, então $f$ é cont. em $x_0$.

Isso se aplica no caso de várias variáveis?

Por exemplo:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Observe que $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. (Verifique!)

Logo, $f$ não é contínua na origem.

No entanto,

- $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x \cdot 0}{\Delta x^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0;$$

e:

- $$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{0 \cdot \Delta y}{0^2 + \Delta y^2} - 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0$$

Ou seja, temos que $f$ não é contínua na origem, mas possui derivadas parciais na origem, e valem $0$.

No entanto, embora o que foi feito acima pareça paradoxal, estamos relacionando continuidade com derivação parcial, não continuidade com diferenciação.

Ou seja, veremos na próxima aula, que para funções a várias variáveis, o fato de $f$ ser DIFERENCIÁVEL (e definiremos este conceito) implicará em $f$ ser contínua, em um dado ponto $a \in \mathbb{R}^m$.

A ideia da diferenciabilidade em um ponto $a \in \mathbb{R}^m$ consistirá em obter uma função afim $A(x) = L(x) + b$, onde $L: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ será uma transformação linear.