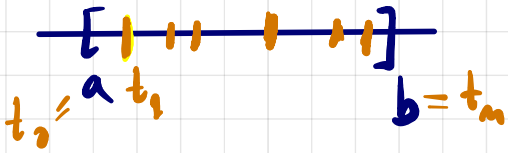
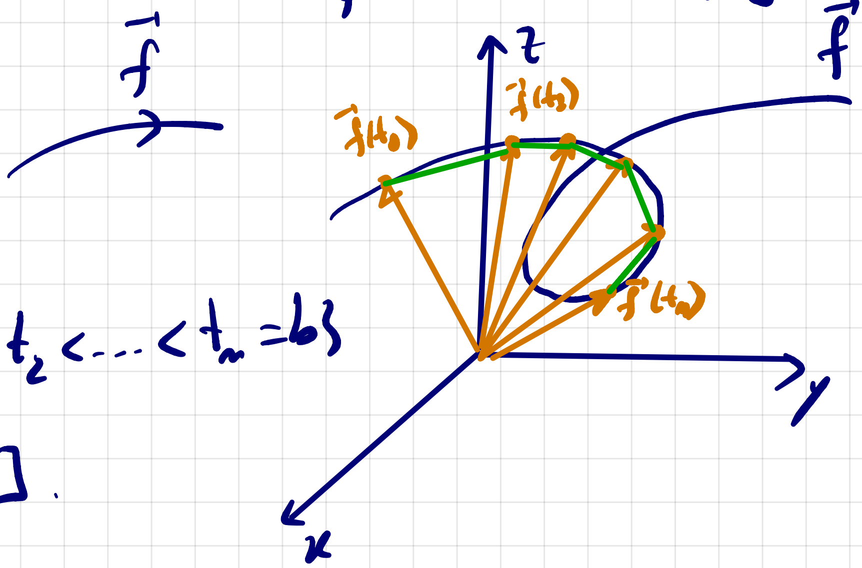
CÁLCULO DO COMPRIMENTO ℓ DE UMA CURVA $\vec{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ EM UM INTERVALO $[a,b]$.

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$, com f_1, f_2, f_3 deriváveis. (ou, pelo menos, deriváveis seccionalmente). Vamos, de forma intuitiva, obter uma fórmula para calcular a medida do comprimento da curva $\vec{f}(t)$ em $[a,b]$.





Seja $P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b\}$ uma partição de $[a,b]$.

Isso determina os vetores $\vec{f}(t_0), \vec{f}(t_1), \ldots, \vec{f}(t_n)$ sobre o gráfico de $\vec{f}$.

Isso define uma linha poligonal

$\ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_n$, onde

$$l_1 = |\vec{f}(t_1) - \vec{f}(t_0)| ;$$

$$l_2 = |\vec{f}(t_2) - \vec{f}(t_1)| ;$$

$$\vdots$$

$$l_n = |\vec{f}(t_n) - \vec{f}(t_{n-1})| .$$

O comprimento aproximado, $\tilde{l}$, será

$$\tilde{l} = \sum_{i=1}^{n} |\vec{f}(t_i) - \vec{f}(t_{i-1})|$$

Efetuando uma série de avaliações, chegaremos à fórmula: $l = \int_a^b |\vec{f}'(t)| \cdot dt$

VAI USAR O TEOREMA DO VALOR MÉDIO PARA CADA FUNÇÃO COORDENADA

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{f_1'(c)^2 + f_2'(d)^2 + f_3'(e)^2} \cdot \Delta t_i$$

$$\int_a^b |\vec{f}'(t)| \cdot dt$$

(...) "SALTO"

DERIVADAS PARCIAIS:

Def.: Seja $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Definimos a derivada de f em relação à variável x_i por

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h},$$

se este limite existir.

Uma derivada parcial é feita sob uma só variável, mantendo as demais fixas, como se fossem constantes. Logo, as regras de derivação parcial serão as regras de derivadas de funções de uma variável real.

No caso de $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, escrevemos: sendo $z = f(x,y)$, teremos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Ex.: $f(x,y) = \sqrt{xy - x^2}$.

Achar $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Solução: Pela definição temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(x+\Delta x).y - (x+\Delta x)^2} - \sqrt{xy - x^2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{xy + \Delta x.y - x^2 - 2x\Delta x - \Delta x^2} - \sqrt{xy - x^2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{xy + \Delta x.y - x^2 - 2x\Delta x - \Delta x^2} - \sqrt{xy - x^2}}{\Delta x} \cdot$$

$$\cdot \frac{\sqrt{xy + \Delta x.y - x^2 - 2x\Delta x - \Delta x^2} + \sqrt{xy - x^2}}{\sqrt{xy + \Delta x.y - x^2 - 2x\Delta x - \Delta x^2} + \sqrt{xy - x^2}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{xy} + \Delta x y \cancel{- x^2} - 2x\Delta x - \Delta x^2 - \cancel{xy} + \cancel{x^2}}{\Delta x . \left(\sqrt{xy + \Delta x.y - x^2 - 2x\Delta x - \Delta x^2} + \sqrt{xy - x^2}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(y - 2x - \Delta x)}{\cancel{\Delta x}\left(\sqrt{xy + \Delta x.y - x^2 - 2x\Delta x - \Delta x^2} + \sqrt{xy - x^2}\right)}$$

$$= \frac{y - 2x}{\sqrt{xy - x^2} + \sqrt{xy - x^2}} = \frac{y - 2x}{2\sqrt{xy - x^2}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y - 2x}{2\sqrt{xy - x^2}}}$$

Ou, pelas regras de derivação:

$$f(x,y) = \sqrt{xy - x^2} = (xy - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}(xy - x^2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (y - 2x) = \frac{y - 2x}{2\sqrt{xy - x^2}}$$

Y É CONSTANTE

Calcule, como exercício, $\frac{\partial f}{\partial y}$ pela definição.
Pelas regras de derivação, teremos:

$$f(x,y) = \sqrt{xy - x^2} = (xy - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}(xy - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot x = \frac{x}{2\sqrt{xy - x^2}}$$

x É CONST.

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{xy - x^2}}}$$

EX 02 $\quad f(x,y,z) = x^3 y^2 - \arctan\left(\frac{x}{y^2 + z^2}\right)$

Achar $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$

obs.: $\boxed{(\arctan u)' = \frac{u'}{1 + u^2}}$

SOLUÇÃO:

- $$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y^2 - \frac{\frac{1}{y^2 + z^2}}{1 + \left(\frac{x}{y^2 + z^2}\right)^2}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \cdot x^3 - \left(\arctan x \cdot (y^2+z^2)^{-1}\right)_y$$

$$= 2yx^3 - \frac{x \cdot (-1) \cdot (y^2+z^2)^{-2} \cdot 2y}{1 + \left(\frac{x}{y^2+z^2}\right)^2}$$

$$= 2yx^3 + \frac{2xy}{(y^2+z^2)^2 \cdot \left(1 + \frac{x^2}{(y^2+z^2)^2}\right)}$$

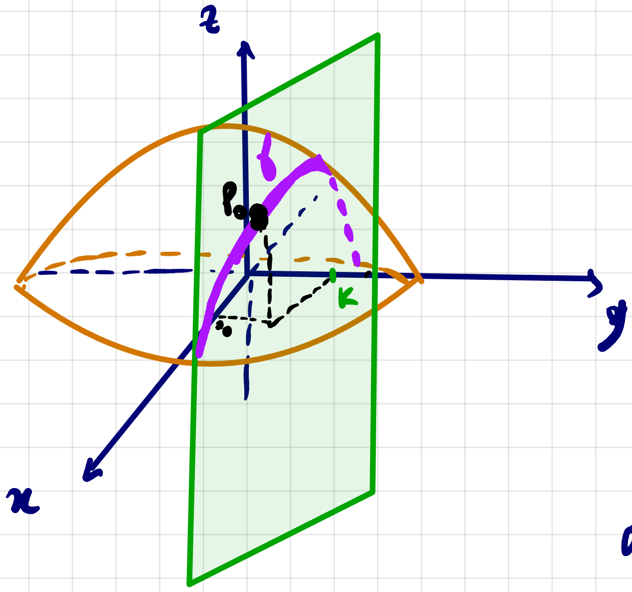
$$\bullet \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \ldots \quad [\text{exercício}]$$

Outras notações para derivada parcial: sendo $f(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = D_x f = f_x = f_1$$

SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DA DERIVAÇÃO PARCIAL:

Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cujo esboço gráfico apresentamos abaixo.



$z = f(x,y)$

$\frac{\partial f}{\partial x}$: ESTAMOS MANTENDO $y = k$.

E $y = k$ É UM PLANO

$\{y = k\} \cap \{f(x,y)\}$ fornece uma curva γ no $\mathbb{R}^3$

$P_0(x_0, K) \in \gamma$

$\Longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, K)$ fornece o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f, pela curva γ

Analogamente para $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

DERIVADAS SUPERIORES:

Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $z = f(x,y)$, se f for 2 vezes derivável, então; definimos:

$$D_x^2 f = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$

$$D_y^2 f = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

$$D_{xy}^2 f = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}$$

1ª

2ª

$$D_{yx}^2 f = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$

Estas derivadas se estendem para funções $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$.