14/04/23

DERIVADAS DE FUNÇÕES DE $\mathbb{R}$ EM $\mathbb{R}^n$. (FUNÇÕES VETORIAIS)

Def.: Seja $\vec{f}: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, A um aberto de $\mathbb{R}$

Definimos a função derivada $\vec{f}'(t)$ por

$$\vec{f}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h},$$

se este limite existir.

Como $\vec{f}(t)$, é dada por

$$\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)),$$ segue que:

$$\vec{f}(t+h) = (f_1(t+h), f_2(t+h), \dots, f_n(t+h))$$

então

$$\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t) = (f_1(t+h) - f_1(t), \dots, f_n(t+h) - f_n(t))$$

Logo, para $h \neq 0$, temos:

$$\frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h} = \frac{1}{h} \cdot (f_1(t+h) - f_1(t), \dots, f_n(t+h) - f_n(t))$$

$$= \left(\frac{f_1(t+h) - f_1(t)}{h}, \dots, \frac{f_n(t+h) - f_n(t)}{h} \right)$$

Assim, passando o limite, vamos encontrar:

$$\vec{f}'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h} =$$

$$= \left(\lim_{h\to 0} \frac{f_1(t+h) - f_1(t)}{h}, \lim_{h\to 0} \frac{f_2(t+h) - f_2(t)}{h}, \ldots, \lim_{h\to 0} \frac{f_n(t+h) - f_n(t)}{h} \right)$$

$$= \left(f_1'(t), f_2'(t), \ldots, f_n'(t) \right)$$

Ou seja, $\vec{f}'(t)$ resume-se ao cálculo das derivadas de cada função coordenada que define a $\vec{f}$.

Ex.: $\vec{f}(t) = (t^3 - 3t^2)\vec{i} + \arctan\sqrt{t}\,\vec{j} + \operatorname{sen}\left(\frac{t+1}{t-1}\right)\vec{k}$.

Então, teremos: $\qquad (\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$

$$\vec{f}'(t) = \frac{d}{dt}(t^3 - 3t^2)\,\vec{i} + \frac{d}{dt}\left(\arctan t^{\frac{1}{2}}\right)\vec{j} + \frac{d}{dt}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{t+1}{t-1}\right)\right)\vec{k}$$

$$= (3t^2 - 6t)\vec{i} + \frac{\left(t^{\frac{1}{2}}\right)'}{1 + \left(t^{\frac{1}{2}}\right)^2}\vec{j} + \cos\left(\frac{t+1}{t-1}\right) \cdot \left(\frac{t+1}{t-1}\right)'\vec{k}$$

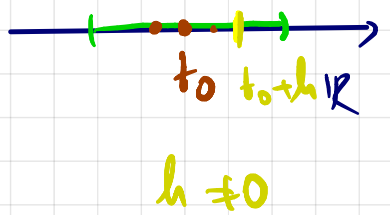
$$\left(\frac{u}{v}\right)$$

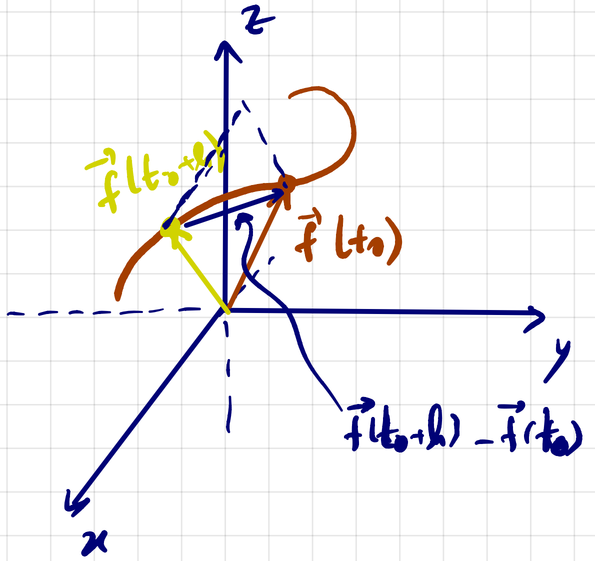
$$= (3t^2 - 6t)\vec{i} + \frac{\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} \cdot 1}{1 + t}\vec{j} + \cos\left(\frac{t+1}{t-1}\right) \cdot \frac{(t-1)\cdot 1 - (t+1)\cdot 1}{(t-1)^2}\cdot\vec{k}$$

$$t - 1 - t - 1$$

$$= (3t^2 - 6t)\vec{i} + \frac{1}{2\sqrt{t}\cdot(1+t)}\vec{j} - \frac{2}{(t-1)^2}\cdot\cos\left(\frac{t+1}{t-1}\right)\vec{k}$$

No caso de $\mathbb{R} \xrightarrow{\vec{f}} \mathbb{R}^3$, podemos apresentar um significado geométrico:

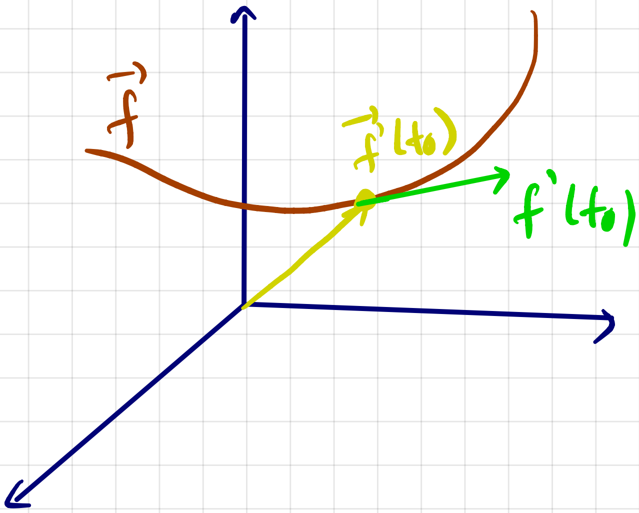




À medida em que $h \to 0$, $\vec{f}(t_0+h) - \vec{f}(t_0)$ vai se aproximando do vetor tangente ao gráfico de $\vec{f}$ no ponto t_0, ou seja, vamos obter

$$\frac{\vec{f}(t_0+h) - \vec{f}(t_0)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} \vec{f}'(t_0)$$

<u>Conclusão</u>: A derivada $\vec{f}'(t_0)$ fornece o vetor tangente à curva $\vec{f}(t)$ no ponto $t = t_0$.



PROPOSIÇÃO: Sejam $\vec{f}, \vec{g} : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$\vec{f} = (f_1, f_2, f_3) \; ; \; \vec{g} = (g_1, g_2, g_3) \; ;$$

e $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $\vec{f}$ e $\vec{g}$ forem deriváveis, então:

(i) $(\vec{f} \pm \vec{g})' = \vec{f}' \pm \vec{g}'$.

(ii) $(\vec{f} \cdot \vec{g})' = \vec{f} \cdot \vec{g}' + \vec{f}' \cdot \vec{g}$, onde "$\cdot$" denota o produto escalar entre vetores.

(iii) $(\vec{f} \times \vec{g})' = \vec{f}' \times \vec{g} + \vec{f} \times \vec{g}'$

DEMONSTRAÇÃO: Provaremos apenas (iii), e as demais ficam como exercício.

Sejam $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ e

$$\vec{g}(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t))$$

Então:

$$\vec{f} \times \vec{g} = \left| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{matrix} \right| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{matrix}$$

$$= (f_2 \cdot g_3 - f_3 g_2 \; ; \; f_3 \cdot g_1 - f_1 g_3 \; , \; f_1 \cdot g_2 - f_2 g_1)$$

Então:

$$(\vec{f} \times \vec{g})' = \left([f_2 \cdot g_3 - f_3\, g_2]',\ [f_3\, g_1 - f_1\, g_3]',\ [f_1 \cdot g_2 - f_2\, g_1]' \right)$$

$$= \left(f_2 \cdot g_3' + f_2' \cdot g_3 - f_3 \cdot g_2' - f_3'\, g_2,\ f_3 \cdot g_1' + f_3' \cdot g_1 - f_1 \cdot g_3' - f_1' \cdot g_3,\ f_1 \cdot g_2' + f_1' \cdot g_2 - f_2 \cdot g_1' - f_2' \cdot g_1 \right)$$

$$= \underbrace{\left(f_2' \cdot g_3 - f_3'\, g_2,\ f_3'\, g_1 - f_1'\, g_3,\ f_1' \cdot g_2 - f_2'\, g_1 \right)}_{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1' & f_2' & f_3' \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix}} +$$

$$+ \left(f_2 \cdot g_3' - f_3\, g_2',\ f_3\, g_1' - f_1 \cdot g_3',\ f_1\, g_2' - f_2\, g_1' \right)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1' & f_2' & f_3' \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1' & g_2' & g_3' \end{vmatrix} = \vec{f}' \times \vec{g} + \vec{f} \times \vec{g}'$$

$\square$

EXERCÍCIO. Dados as curvas

$$\vec{f}(t) = (t^3, \ln t, t^2)$$

e

$$\vec{g}(t) = (\sqrt{t^2+1}, -2t^3, t)$$

Calcule $(\vec{f} \times \vec{f})'(1)$.

Solução:

$$(\vec{f} \times \vec{g})'(1) = \vec{f}(1) \times \vec{g}'(1) + \vec{f}'(1) \times \vec{g}(1);$$

onde:

$$\vec{g}'(t) = \left(\frac{1}{\cancel{2}}(t^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2}t, -6t^2, 1 \right)$$

$$\vec{g}'(t) = \left(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}, -6t^2, 1 \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{g}'(1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -6, 1 \right)}$$

$$\vec{f}(t) = (t^3, \ln t, t^2)$$

$$\Rightarrow \vec{f}'(t) = \left(3t^2, \frac{1}{t}, 2t \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{f}'(1) = (3, 1, 2)}$$

Além disso:

$$\vec{f}(1) = (1, \ln 1, 1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{f}(1) = (1, 0, 1)}$$

$\boxed{\vec{g}(1) = (\sqrt{2}, -2, 1)}$. Assim, teremos:

$$(\vec{f} \times \vec{g})'(1) = \vec{f}(1) \times \vec{g}'(1) + \vec{f}'(1) \times \vec{g}(1)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -6 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ \sqrt{2} & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \underline{(0+6)}\vec{i} + \left(\overset{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} - 1\right)\vec{j} + \underline{(-6-0)}\vec{k} +$$

$$+ \underline{(1+4)}\vec{i} + (2\sqrt{2}-3)\vec{j} + \underline{(-6-\sqrt{2})}\vec{k}$$

$$= 11\vec{i} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} - 1 - 3\right)\vec{j} + (-12-\sqrt{2})\vec{k}$$

$$= 11\vec{i} + \left(\frac{5\sqrt{2}}{2} - 4\right)\vec{j} + (-12-\sqrt{2})\vec{k}$$