12/04/23

Obs.: De posse do T. do Sanduíche (veja p.df na página), para provar que $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, podemos fazer:

Ex.: $f(x,y) = \dfrac{3x^2y^2}{x^2+y^2}$, onde já vimos na aula passada, pela def. que $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

De fato, outra forma de mostrar isto seria:

$$0 \leq |f(x,y)| = \left|\frac{3x^2y^2}{x^2+y^2}\right| = \frac{3\cdot|x|^2\cdot|y|^2}{x^2+y^2};$$

como $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$, e

$|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$; então,

$$0 \leq |f(x,y)| = \frac{3\cdot|x|^2\cdot|y|^2}{x^2+y^2} \leq \frac{3\left(\cancel{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^{\cancel{2}}\cdot\left(\cancel{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^{\cancel{2}}}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq |f(x,y)| \leq \frac{3(x^2+y^2)^{\cancel{2}}}{\cancel{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{0}_{\substack{\downarrow \\ 0 \ (x,y)\to(0,0)}} \leq |f(x,y)| \leq \underbrace{3(x^2+y^2)}_{\substack{\to 0 \\ (x,y)\to(0,0)}}$$

$$\xrightarrow[\text{Sanduíche}]{\text{T. do}} \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

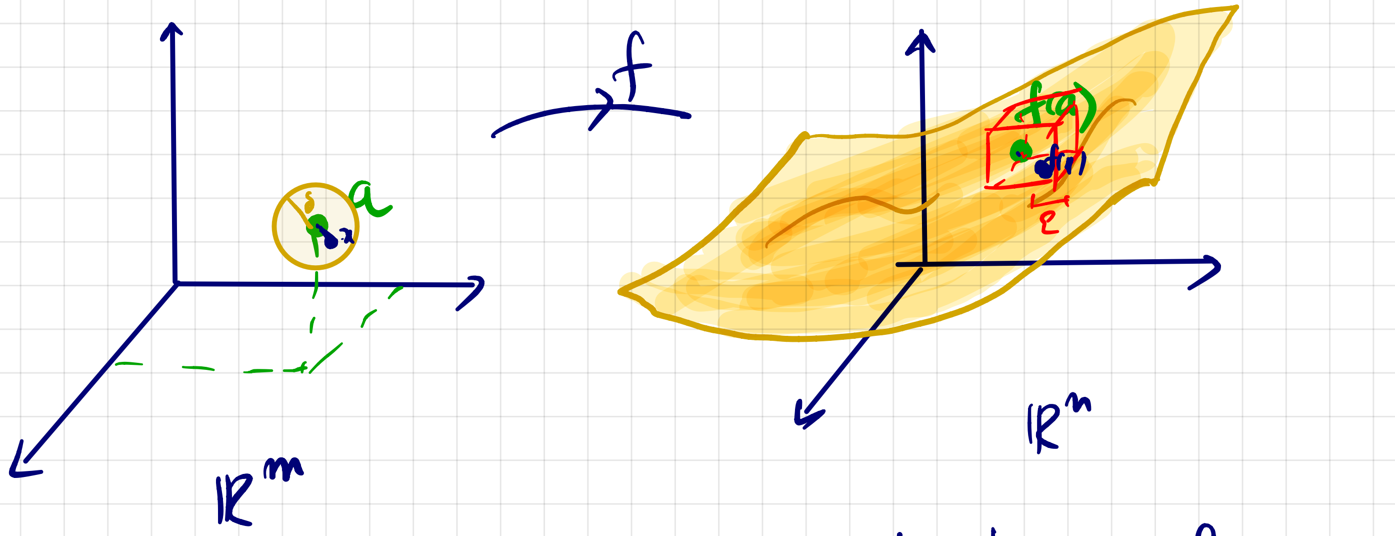
obs.: $(\mathbb{R}^m, d)$; $(\mathbb{R}^n, \tilde{d})$

FUNÇÕES CONTÍNUAS:

Def.: Seja $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função, $a \in A$.

Dizemos que f é contínua no ponto a se, e somente se,

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que; $\forall x \in A : d(x,a) < \delta \Rightarrow \tilde{d}(f(x), f(a)) < \varepsilon$.



Quando $a \in A'$, i.e., a for ponto de acumulação do conj. A, então, dizemos que $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é contínua em $a \in A \cap A'$ se, e somente se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

em geral, verificamos:

(i) $\exists f(a)$

(ii) $\exists \lim_{x \to a} f(x)$

(iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Dizemos que $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é contínua em A se for contínua em todos os pontos do conj. A.

Ex.: A função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Já vimos no início da aula, usando o T. do Sanduíche, ou no final da aula passada, pela def., que

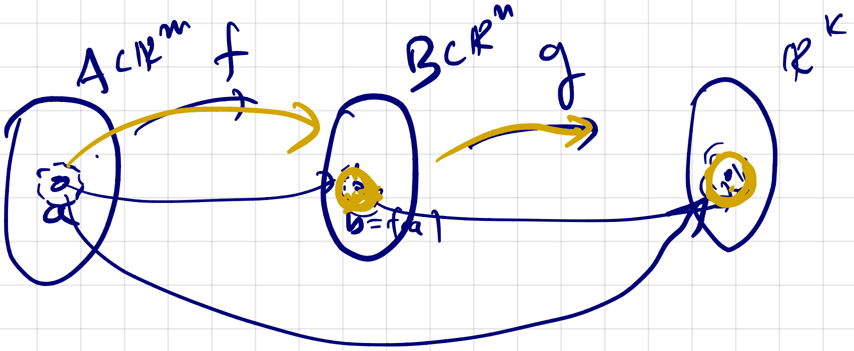
$$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

Logo, f é contínua na origem.

TEOREMA Composição de funções contínuas é uma função contínua. Mais precisamente, sejam $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $g: B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, f contínua em $a \in A$ e g contínua em $b = f(a) \in B$.
Então, $g \circ f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ é contínua em $a \in A$.

DEMONSTR.: Sejam f e g nas hipóteses do teorema.

Dado $\varepsilon > 0$.



Como g é cont. em b, $\exists\ \delta_1 > 0$ tal que,

$$\forall\ y \in B_{\delta_1}(b) \Rightarrow g(y) \in B_{\varepsilon}(g(b)).$$

Ainda, como f é cont. em a, então,

$$\exists\ \delta > 0 \text{ tal que, } \forall\ x \in B_{\delta}(a) \Rightarrow \underbrace{f(x)}_{y} \in B_{\delta_1}(b)$$

Ou seja, dado $\varepsilon > 0$, mostramos que

$$\exists\ \delta > 0 \text{ tal que, } \forall\ x \in B_{\delta}(a) \Rightarrow \underline{g(y)} \in B_{\varepsilon}(\underbrace{g(b)}_{g(f(a))})$$

$$g(f(x)) \in B_{\varepsilon}(g(b))$$

i.e., $(g \circ f)(x) \in B_{\varepsilon}((g \circ f)(a))$

$g \circ f$ é contínua em a.

$\square$

PROPOSIÇÃO: Se $f, g : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ são contínuas, então

$f + g$, $f - g$; $k \cdot f$ $(k \in \mathbb{R}, k \neq 0)$ são contínuas.

No que segue, vamos voltar para o estudo de limite para funções vetoriais $\vec{f} : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Seja $\vec{f} : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $a \in A'$, i.e., $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação do conj. A, então

$$\lim_{t \to a} \vec{f}(t) = \vec{l}, \quad \text{onde } \vec{l} = (l_1, l_2, l_3), \text{ se e}$$

somente se,

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que, $\forall x \in A$: $0 < |x - a| < \delta$, implica em $d_2(\vec{f}(x), \vec{l}) < \varepsilon$, i.e.;

$$\sqrt{(f_1(x) - l_1)^2 + (f_2(x) - l_2)^2 + (f_3(x) - l_3)^2} < \varepsilon.$$

$$t \xrightarrow{f} (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$$

AFIRMAÇÃO: $\lim\limits_{t \to a} \vec{f}(t) = \left(\lim\limits_{t \to a} f_1(t), \lim\limits_{t \to a} f_2(t), \lim\limits_{t \to a} f_3(t) \right)$

Ou seja, o limite de uma função vetorial resume-se ao cálculo de limite de cada função coordenada.

Vamos mostrar isto para funções $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3$, notando que vale para funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$.

De fato; seja

$$\lim_{t \to a} \vec{f}(t) = \vec{l} = (l_1, l_2, l_3), \quad \text{então,}$$

dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que, $\forall x \in A$: $0 < |x - a| < \delta$

$\Rightarrow d_1(f(x), l) < \varepsilon$, i.e.;

ESTAMOS USANDO A MÉTRICA d_1, MAS PODERIA SER OUTRA

$$|f_1(x) - l_1| + |f_2(x) - l_2| + |f_3(x) - l_3| < \varepsilon \quad (*)$$

$\Rightarrow |f_1(x) - l_1| < \varepsilon$; $|f_2(x) - l_2| < \varepsilon$ e $|f_3(x) - l_3| < \varepsilon$,

sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

(ou seja, se a soma $(*)$ é menor do que $\varepsilon > 0$, então cada um dos aditivos desta soma será menor do que ε)

Assim, para o $\varepsilon > 0$ dado, $\exists\ \delta > 0$ tal que $\forall x$:
$0 < |x - a| < \delta$, implica em:

- $|f_1(x) - l_1| < \varepsilon$; i.e., $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = l_1$
- $|f_2(x) - l_2| < \varepsilon$; i.e., $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = l_2$
- $|f_3(x) - l_3| < \varepsilon$; i.e., $\lim\limits_{x \to a} f_3(x) = l_3$

Logo tendo $\lim\limits_{x \to a} \vec{f}(x) = \vec{l}$, segue que

$$\left(\lim_{x \to a} f_1(x),\ \lim_{x \to a} f_2(x),\ \lim_{x \to a} f_3(x) \right) = (l_1, l_2, l_3) = \vec{l}$$

E, reciprocamente. $\square$

EXEMPLO:

Calcule $\lim\limits_{t \to 1} \left(\dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 2t - 3},\ \dfrac{\sqrt{t+3} - 2}{t - 1},\ \dfrac{\operatorname{sen}(t^2 - 1)}{t - 1} \right)$

Solução: Basta calcular os limites separadamente, Assim:

- $$\lim_{t \to 1} \frac{t^2 - 1}{t^2 + 2t - 3} = \lim_{t \to 1} \frac{(t+1)\cancel{(t-1)}}{\cancel{(t-1)} \cdot (t+3)} = \lim_{t \to 1} \frac{t+1}{t+3} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{l|l} t^2 + 2t - 3 & t - 1 \\ \hline -t^2 + t & t + 3 \\ \hline 3t - 3 & \\ -3t + 3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

- $\lim_{t\to 1} \frac{\sqrt{t+3}-2}{t-1} \times \frac{\sqrt{t+3}+2}{\sqrt{t+3}+2} = \lim_{t\to 1} \frac{t+3-4}{(t-1).(\sqrt{t+3}+2)}$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{\cancel{t-1}}{(\cancel{t-1})(\sqrt{t+3}+2)} = \frac{1}{4}$$

- $\lim_{t\to 1} \frac{\operatorname{sen}(t^2-1)}{t-1} = \lim_{t\to 1} \frac{\operatorname{sen}(t^2-1)}{(t-1)(t+1)} \times (t+1) =$

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = 1$$

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\alpha} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot \alpha^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\alpha} \cdot \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$= \lim_{\alpha\to 0} \left(1 - \underbrace{\frac{\alpha^2}{3!}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\alpha^4}{5!}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{\alpha^6}{7!}}_{\to 0} + \cdots\right) = 1.$$

$$= \lim_{t\to 1} (t+1) \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(t^2-1)}{t^2-1}}_{\to 1} = 2$$

Portanto, concluímos que $\lim_{t\to 1} \vec{f}(t) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 2\right)$.

Def.: Dizemos que $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é cont. em $a \in A' \cap A$ se, e só se

$$\lim_{t\to a} \vec{f}(t) = \vec{f}(a).$$