Resolução de exercícios da lista 02.

01) Basta escrever

$$A = \alpha M + \beta N + \gamma P \quad , \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Assim:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \alpha . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

donde segue que

$$\begin{cases} \alpha = 3 \\ \alpha + 2\gamma = 1 \\ \alpha + \beta = 1 \\ \beta - \gamma = -1 \end{cases}$$

$$3 + 2\gamma = 1 \Rightarrow \boxed{\gamma = -1}$$

$$\beta = 1 - \alpha$$
$$\beta = 1 - 3 \Rightarrow \boxed{\beta = -2}$$

$$\Downarrow$$

$$-2 - (-1) = -1 \ (\text{ok})!$$

Logo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 3 . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 1 . \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

---

04) sendo $0 = 0 + 0x + 0x^2$ o vetor nulo em P_2, então, dados $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha . (1+x) + \beta . (3x + x^2) + \gamma . (2 + x - x^2) = 0 + 0x + 0x^2$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0 \\ \alpha + 3\beta + \gamma = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = -2\gamma$$

$$\beta = \gamma$$

$$\alpha + 3\beta + \gamma = 0$$
$$-2\gamma + 3.(\gamma) + \gamma = 0 \rightarrow \gamma = 0 \quad \Bigg| \Rightarrow \alpha = 0 \text{ e } \beta = 0$$

Logo, os vetores $1+x$; $3x+x^2$ e $2+x-x^2$ são L.I. em P_2.

---

05) Seja $\beta = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ conj. L.I. em V.

A mostrar: $\{\vec{u}-\vec{v};\ \vec{u}+\vec{w};\ 2\vec{u}-\vec{v}+2\vec{w}\}$ também é L.I. em V.

De fato: montando

$$a.(\vec{u}-\vec{v}) + b.(\vec{u}+\vec{w}) + c.(2\vec{u}-\vec{v}+2\vec{w}) = \vec{0},$$

obtemos

$$(a+b+2c)\vec{u} + (-a-c)\vec{v} + (b+2c)\vec{w} = \vec{0},$$

e como $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é L.I., por hipótese, segue que

$$\begin{cases} a+b+2c = 0 \\ -a - c = 0 \rightsquigarrow \boxed{a = -c} \\ b + 2c = 0 \rightsquigarrow \boxed{b = -2c} \end{cases}$$

$$a + b + 2c = 0$$

$$-c - \cancel{2c} + \cancel{2c} = 0 \Rightarrow \boxed{c = 0} \Rightarrow \boxed{a = b = 0}$$

Logo, o conj. $\{\vec{u}-\vec{v}, \vec{u}+\vec{w}, 2\vec{u}-\vec{v}+2\vec{w}\}$ é L.I. em V.

---

08) Lembre-se que, para um conjunto β de vetores em V ser uma base para V, deverá ser satisfeito:

(i) β é L.I.

(ii) $[\beta] = V$.

Vamos fazer o item (a) apenas, visto que o mesmo procedimento se repetirá para os demais itens.

(a) $\{(1,1,-1); (2,-1,0); (3,2,0)\} = \beta$

(i) β é L.I.? Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$a(1,1,-1) + b(2,-1,0) + c.(3,2,0) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ a - b + 2c = 0 \\ -a = 0 \end{cases} \to a = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 2b + 3c = 0 \\ -b + 2c = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{b = 2c}$$

$2.(2c) + 3c = 0$

$\Rightarrow c = 0$

$b = 0$

Logo, o conj. β é L.I.

(ii) $[\beta] = V$?

Como $[\beta] \subset V$, basta mostrar que $V \subset [\beta]$.
Dado $\vec{u} = (x,y,z) \in V$, vamos mostrar que $\vec{u} \in [\beta]$.
Para isto, basta conseguir representá-lo como soma comb. linear dos elementos do conj. β. De fato:

$$(x,y,z) = a\cdot(1,1,-1) + b\cdot(2,-1,0) + c\cdot(3,2,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + 3c = x \\ a - b + 2c = y \\ -a = z \end{cases} \Rightarrow a = -z$$

$\Downarrow$ substituímos a por $-z$ nas duas primeiras equações.

$$\begin{cases} 2b + 3c = x + z \\ -b + 2c = y + z \quad (\times 2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\cancel{b} + 3c = x + z \\ -2\cancel{b} + 4c = 2y + 2z \end{cases}$$

$$7c = x + 2y + 3z \Rightarrow \boxed{c = \frac{x+2y+3z}{7}}$$

Por fim: $-b + 2c = y + z$

$$\Rightarrow b = 2c - y - z$$

$$b = 2\cdot\left(\frac{x+2y+3z}{7}\right) - y - z$$

$$\Rightarrow \boxed{b = \frac{2x - 3y - z}{7}}$$

Logo, obtemos

$$(x,y,z) = -z\cdot(1,1,-1) + \frac{2x-3y-z}{7}(2,-1,0) + \frac{x+2y+3z}{7}(3,2,0) \in [\beta]$$

Portanto, o conj. β é uma base para V.

15) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\} \subset \mathbb{R}^3$.

base ? $\dim W = ?$

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = -y-z\} =$$

$$= \{(-y-z, y, z) : x,y,z \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{(-y,y,0) + (-z,0,z) : y,z \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{y\cdot(-1,1,0) + z\cdot(-1,0,1) : y,z \in \mathbb{R}\} =$$

$$= [(-1,1,0);(-1,0,1)]$$

Vamos mostrar que o conj. $\{(-1,1,0);(-1,0,1)\}$ é L.I..

De fato, sejam $a,b \in \mathbb{R}$ tais que

$$a\cdot(-1,1,0) + b\cdot(-1,0,1) = (0,0,0)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -a-b = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \qquad 0=0 \ (\text{ok!})$$

Portanto, o conj. $\beta = \{(-1,1,0);(-1,0,1)\}$ é L.I.,

donde segue que β será uma base para W e $\dim W = 2$.

16) • $W = \{(x,y,z) : x = -2z \text{ e } y = -z\}$

$= \{(-2z, -z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \{z \cdot (-2, -1, 1) : z \in \mathbb{R}\}$

$= [(-2, -1, 1)]$

• $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y + 4z = 0\}$

$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \frac{-3y - 4z}{2}\}$

$= \{(\frac{-3y}{2} - 2z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$

$= \{(-\frac{3}{2}y, y, 0) + (-2z, 0, z)\}$

$= \{y \cdot (-\frac{3}{2}, 1, 0) + z(-2, 0, 1) : y, z \in \mathbb{R}\}$

$= [(-\frac{3}{2}, 1, 0); (-2, 0, 1)]$

Logo; temos:

$V + W = [(-2, -1, 1); (-\frac{3}{2}, 1, 0); (-2, 0, 1)]$

O conj. $\{(-2, -1, 1); (-\frac{3}{2}, 1, 0); (-2, 0, 1)\}$ é L.I, pois dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que:

$a(-2, -1, 1) + b \cdot (-\frac{3}{2}, 1, 0) + c \cdot (-2, 0, 1) = (0, 0, 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a - \frac{3}{2}b - 2c = 0 \\ -a + b = 0 \rightsquigarrow b = a \\ a + c = 0 \rightsquigarrow c = -a \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$-2a - \frac{3}{2} \cdot a - 2 \cdot (-a) = 0$$

$$-\frac{3}{2}a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Logo, $\{(-2,-1,1); (-\frac{3}{2},1,0); (-2,0,1)\}$ é uma base para $V+W$, donde segue que $\dim(V+W) = 3$.

• $V \cap W = ?$ será a solução do sistema linear

$$\begin{cases} x = -2z \\ y = -z \\ 2x - 3y + 4z = 0 \to 2 \cdot (-2z) - 3 \cdot (-z) + 4 \cdot z = 0 \end{cases}$$

$$-\cancel{4z} + 3z + \cancel{4z} = 0$$

$$z = 0$$

$$x = 0$$
$$y = 0$$

Logo, $V \cap W = \{(0,0,0)\}$; e disso segue que $\dim(V \cap W) = 0$.