REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÕES EM SÉRIES DE POTÊNCIAS:

Uma maneira de se representar algumas funções como uma série de potências é pensar na série geométrica

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n} \quad ; \quad |x|<1 \qquad \boxed{R = 1.}$$

Vejamos alguns exemplos:

01) Represente $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ como uma série de potências, apresentando o seu raio de convergência.

Solução:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}$$

converge onde $|-x^2|<1$, i.e. $|x|<1$.

02) Idem para $f(x) = \frac{x^4}{x+2}$.

Solução:

$$\frac{x^4}{x+2} = x^4 \cdot \frac{1}{2+x} = x^4 \cdot \frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)}$$

$\left|-\frac{x}{2}\right| < 1$

$|x| < 2$

$$= \frac{x^4}{2} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)} = \boxed{\frac{x^4}{2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^n}$$

obs.: $n+4=p$, $n = p-4$

$$= \frac{x^4}{2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{n+4}}{2^{n+1}} = \sum_{p=4}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-4} \cdot x^p}{2^{p-3}}$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$$

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n+2}} \cdot 2^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{2^{n+1}}}{\cancel{2^{n+1}} \cdot 2}} = 2$$

Ex.: LISTA 03, QUESTÃO 05(f):

$$f(x) = \frac{3}{x^2+x-2}$$

$$x^2+x-2 = 1\cdot\left[(x-a)^2+b\right]$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + b$$

$$-2a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$a^2 + b = -2$

$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + b = -2$

$b = -2 - \frac{1}{4}$

$\boxed{b = -\frac{9}{4}}$

Assim: $f(x) = \dfrac{3}{x^2+x-2} = \dfrac{3}{1\left[(x-a)^2+b\right]}$

$$= \frac{3}{\underbrace{\left(x+\frac{1}{2}\right)}_{\alpha}{}^2 - \frac{9}{4}} =$$

$$\frac{1}{1-\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n$$

$$= \frac{-3}{\frac{9}{4} - \left(x+\frac{1}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{-3}{\frac{9}{4}\left[1 - \frac{4}{9}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right]} = -\cancel{3}\times\frac{4}{\cancel{9}_{3}} \cdot \frac{1}{1 - \underbrace{\frac{4}{9}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}_{a}}$$

$$= -\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1 - \underbrace{\frac{4}{9}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}_{a}} = -\frac{4}{3} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{4}{9}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right]^n$$

$$= -\frac{4}{3} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{9^n} \cdot \left(x+\frac{1}{2}\right)^{2n} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^{n+1}}{3 \cdot 3^{2n}} \cdot \left(x+\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$(3 \cdot 3)^n = 3^n \cdot 3^n = 3^{2n}$$

$$= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^{n+1}}{3^{2n+1}} \cdot \left(x+\frac{1}{2}\right)^{2n},$$

converge onde $\left|\frac{4}{9}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right| < 1$.

TEOREMA: Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n$ uma série de potências, possuindo um raio de convergência $R > 0$.

Então, f é derivável, com

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot a_n \, x^{n-1}, \text{ e}$$

f também é integrável, com

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n \, x^{n+1}}{n+1}$$

Além disso, em ambas as novas séries, o raio de convergência ainda será R.

DEMONSTRAÇÃO: Exige conhecimento de convergência uniforme e isto é estudado em ANÁLISE.

EXEMPLOS:

01) $\dfrac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$, $|t| < 1$.

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^n\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^n\,dt$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right|_0^x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - 0\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{dt}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

Ou seja, obtemos

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \quad ; \quad |x|<1$$

$$\int \frac{dv}{v} = \ln|v| + C$$

$$v = 1-t \Rightarrow dv = -dt$$

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-t)\Big|_0^x = -\ln(1-x) + \underbrace{\ln 1}_{=0} = -\ln(1-x)$$

Ou seja, acabamos de encontrar uma representação em séries de potência para $\ln(1-x)$:

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n}}$$

Do mesmo modo:

$$\frac{1}{1+t} = \frac{1}{1-\underbrace{(-t)}_{a}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-t)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot t^n \quad ; \underline{R=1}$$

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot t^n \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \int_0^x t^n \cdot dt$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$$

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+t)\Big|_0^x = \ln(1+x) - \underbrace{\ln 1}_{=0} = \ln(1+x)$$

Portanto, obtemos:

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}} \quad ; \quad R=1$$

OUTRO EXEMPLO: Sabemos do cálculo II que

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x$$

obs.: Lembrai-vos que: $\displaystyle\int_0^x \frac{dv}{a^2+v^2} = \frac{1}{a} \cdot \arctan\left(\frac{v}{a}\right)$

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x$$

Por outro lado,

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1-\underbrace{(-t^2)}_{a}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-t^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n . t^{2n}$$

Integrando, vem:

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n . t^{2n} . dt$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n . \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n . \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^x$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n . \frac{x^{2n+1}}{2n+1} , \quad \boxed{R = 1}$$

Ou seja, obtemos

$$\boxed{\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n . \frac{x^{2n+1}}{2n+1}} ; \quad R = 1$$

OUTRO EXEMPLO:

$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$. série para esta função?

Note que $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-\underbrace{(-x)}_{a}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n . x^n$

Derivando, obtemos:

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)' = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n . x^n\right)$$

$$\left((1+x)^{-1}\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n . n . x^{n-1}$$

$$-1 . (1+x)^{-2} . 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n . n . x^{n-1}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n . n . x^{n-1} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} . n . x^{n-1}}$$

$R = 1$