LISTA 01

14. Seja (x_n) uma sequência de números reais positivos tais que existe $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. Prove que $\exists\lambda$, com $0<\lambda<1$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $|x_{n+1}| \le \lambda |x_n|$, $\forall n \ge n_0$. Conclua que

$$x_n > 0, \forall n, \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1 \Longrightarrow x_n \to 0.$$

Em seguida, use o resultado acima para mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \forall a > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

$\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = c < 1.$, $c > 0$ $\quad x_n > 0, \forall n$

mostrar: $\exists \lambda \in (0,1)$ e $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $|x_{n+1}| \le \lambda . |x_n|$, $\forall n \ge n_0$.

Dado $\varepsilon > 0$ tal que $c + \varepsilon < 1$.

$c+\varepsilon$ — 0 — c — 1

Como $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = c < 1$, então, segue que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} - c \right| < \varepsilon$.

Ou seja,

$$\left| \frac{x_{n+1} - c . x_n}{x_n} \right| < \varepsilon.$$

$$\Rightarrow |x_{n+1} - c . x_n| < \varepsilon . |x_n|$$

$$|a-b| \geq |a| - |b|$$

$$|x_{n+1}| - |c . x_n| \leq |x_{n+1} - c . x_n| < \varepsilon . |x_n|$$

Como $c > 0$, então, podemos escrever:

$$|x_{n+1}| - c . |x_n| < \varepsilon . |x_n| \quad , \forall n \geq n_0$$

$$|x_{n+1}| < \varepsilon . |x_n| + c . |x_n|$$

$$|x_{n+1}| < \underbrace{(\varepsilon + c)}_{=\lambda} . |x_n| \quad , \forall n \geq n_0 .$$

Ou seja, definindo $\lambda := c + \varepsilon < 1$, segue que

$$|x_{n+1}| \leq \lambda . |x_n| , \quad \forall n \geq n_0$$

Agora, como $x_n > 0, \forall n$, e

$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, então, pelo que mostramos acima, segue que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ e $\exists \lambda \in (0,1)$ tais que

$$|x_{n+1}| \leq \lambda . |x_n| \quad , \forall n \geq n_0 .$$

$$|x_{n+1}| \leq \lambda . |x_n| \leq \lambda . (\lambda . |x_{n-1}|) = \lambda^2 . |x_{n-1}| \leq \lambda^2 . (\lambda . |x_{n-2}|)$$

$$= \lambda^3 . |x_{n-2}| \leq \dots \leq \lambda^{n-n_0+1} . |x_{n_0}| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

EXPONENCIAL DECRESCENTE (pois $\lambda \in (0,1)$)

Então,

$|x_n| \to 0$.

Logo, $x_n \to 0$

Por fim, mostremos que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad a>0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \qquad (*)$$

Para resolver cada um desses limites, basta analisar o limite dos quocientes consecutivos de cada um deles.

Se $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, então, pelo feito anteriormente seguirá $(*)$.

• para $x_n = \frac{a^n}{n!}$, $a>0$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{a^n}\cdot a \cdot \cancel{n!}}{(n+1)\cdot \cancel{n!}\cdot \cancel{a^n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{a}{n+1} = 0 < 1.$$

Portanto, segue que $\frac{a^n}{n!} \to 0$.

• para $x_n = \frac{n!}{n^n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{(n+1)}\cdot \cancel{n!}\cdot n^n}{(n+1)^n \cdot \cancel{(n+1)}\cdot \cancel{n!}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \underset{(*)}{\overset{1^\infty}{=}} \lim_{n\to\infty} \Big(1 + \underbrace{\frac{n}{n+1} - 1}_{\text{expressão}}\Big)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^n = \Bigg[\underbrace{\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-1}}}_{e}\Bigg]^{\frac{-1}{n+1}\cdot n} =$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty} \frac{-n}{n+1}} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1.$$

Assim: $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{e} < 1$. Logo, $x_n = \frac{n!}{n^n} \to 0$.

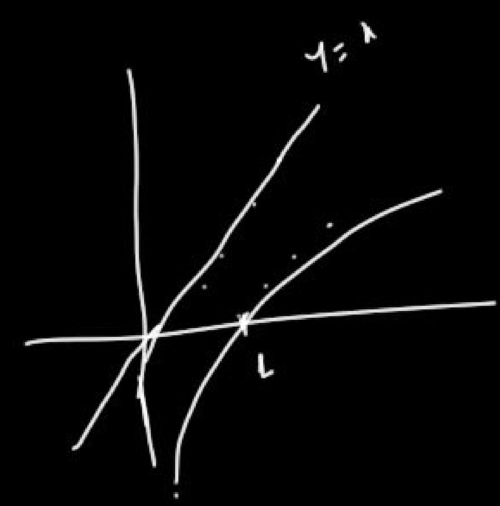
$(*)$ o símbolo 1^∞ indica indeterminação, e a mesma deve ser removida usando o 2º limite notável:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \cong 2,7182818284590\ldots$$

NA PRÁTICA, PRECISAMOS MONTAR $(1 + \text{expressão})^{\frac{1}{\text{expressão}}}$.

LISTA 02

09) (g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}$



? $\ln n < n, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow \frac{\ln n}{n^2} < \frac{n}{n^2} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{DIV.}$ Logo, não se aplica o teste da comparação.

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (série hiper-harmônica com $p = 2 > 1$, logo, convergente)

Pelo teste da comparação do limite, sendo $a_n = \frac{\ln n}{n^2}$ e $b_n = \frac{1}{n^2}$,

então: $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n^2} \times \frac{n^2}{1} = \lim_{n \to +\infty} \ln n = +\infty$

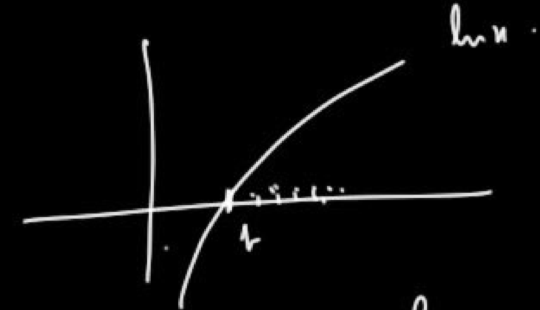
(logo, o teste não se aplica também)

Vamos pensar no teste da integral.

Seja $f : \underbrace{[1, +\infty)}_{} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

Note que
$$f'(x) = \frac{x^2 \cdot \frac{1}{x} - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x - 2x \ln x}{x^4}$$
$$= \frac{\cancel{x}(1 - 2\ln x)}{x^{\cancel{4}}} = \frac{1 - 2\ln x}{\underbrace{x^3}_{>0}} < 0, \quad \forall x \in [1, +\infty)$$

Além disso,
$f(n) = \frac{\ln n}{n^2} = a_n$



Estamos nas hipóteses do teste da integral.

Assim, "basta" calcular $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$$

$\left[\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}\,dx \\ dv = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow v = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x} \end{array}\right.$

$$= \ln x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) - \int -\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x}$$
$$= -\frac{1}{x} \cdot \ln x + \int x^{-2}\,dx = -\frac{1}{x}\ln x + \frac{x^{-1}}{-1} + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\cdot \ln x - \frac{1}{x} + C$$

$$= -\frac{1}{x}\left(\ln x + 1\right) + C$$

Assim:

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{x}\left(\ln x + 1\right)\Big|_1^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{b}\left(\ln b + 1\right) - \left(-\frac{1}{1}\big(\underbrace{\ln 1}_{=0} + 1\big)\right)\right]$$

$$= \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{b}\cdot\left(\ln b + 1\right) + 1 =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \Big(\underbrace{\frac{\ln b + 1}{-b}}_{\to 0} + 1 \Big) = 1 < \infty.$$

Logo, a integral imprópria é convergente.

Então, pelo teste da integral, segue convergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.

L2

14. Mostre que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ converge. Sugestão: utilize o segundo limite notável: $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Use o teste da razão:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!} = \dots = \frac{1}{e} < 1.$$

etc., c.f. 14 - L1.

Logo, pelo teste da razão segue convergência da série dada.