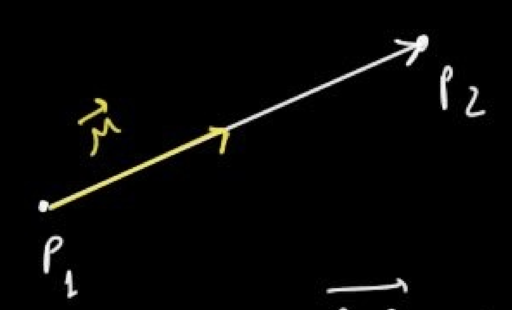
L2

6. Dados os pontos $P_1(4,-1,3)$ e $P_2(2,2,2)$, determine o versor do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$.



$$\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1$$

$$= (2,2,2) - (4,-1,3)$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{P_1P_2} = (-2,\ 3,\ -1)}$$

$$\|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$$

Seja $\vec{u}$ o versor do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$. Então:

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\|\overrightarrow{P_1P_2}\|} = \frac{1}{\|\overrightarrow{P_1P_2}\|} \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot (-2, 3, -1)$$

$$= \left(-\frac{2}{\sqrt{14}},\ \frac{3}{\sqrt{14}},\ -\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$$

$\square$

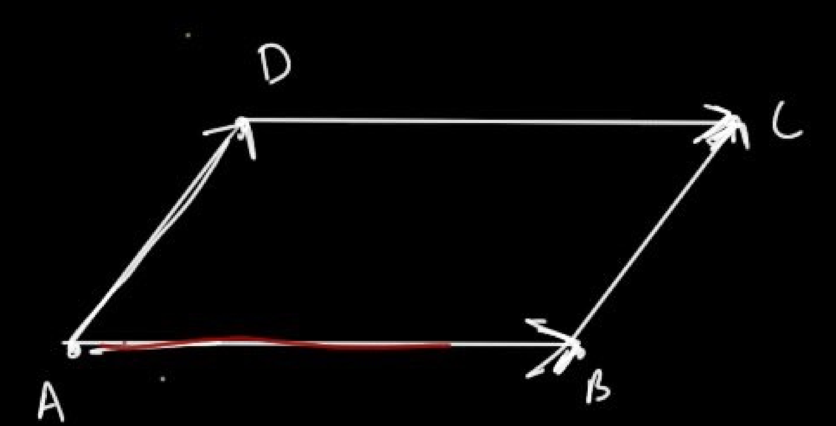
Obs.: De fato, $\vec{u}$ é unitário, pois:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(\frac{-2}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{14}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{14} + \frac{9}{14} + \frac{1}{14}} = \sqrt{\frac{14}{14}} = 1.$$

L2

19. Mostre que o quadrilátero com vértices em $A(1,-2,3)$, $B(4,3,-1)$, $D(2,2,1)$ e $C(5,7,-3)$ é um paralelogramo e ache a sua área.



$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4,3,-1) - (1,-2,3) = (3,5,-4)$$
$$\overrightarrow{DC} = C - D = (5,7,-3) - (2,2,1) = (3,5,-4)$$

São paralelos

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (2,2,1) - (1,-2,3) = (1,4,-2)$$
$$\overrightarrow{BC} = C - B = (5,7,-3) - (4,3,-1) = (1,4,-2)$$

e

$$\text{ÁREA} = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\|$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 5 & -4 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{matrix}$$

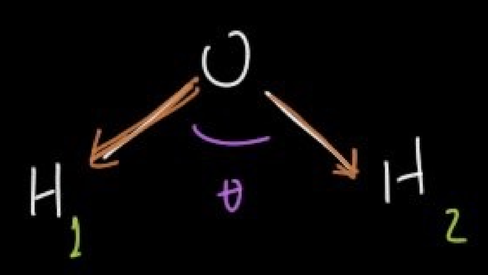
$$= -10\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k} - 5\vec{k} + 16\vec{i} + 6\vec{j} = 6\vec{i} + 2\vec{j} + 7\vec{k} = (6,2,7)$$

Área do paralelogr.: $\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\| = \sqrt{6^2+2^2+7^2} = \sqrt{36+4+49} = \sqrt{89}$

LISTA APLICAÇÃO A1

8. Usando os dados abaixo, calcule os comprimentos e os ângulos de ligação da molécula da água. As coordenadas estão em ângstrons (Å)

	x	y	z
O	2,0317	-1,1893	-1,0464
H_1	1,1374	-1,0385	-0,7880
H_2	2,5201	-0,4437	-0,7383



$O(2,0317 ; -1,1893 ; -1,0464)$

$H_1(1,1374 ; -1,0385 ; -0,7880)$

$H_2(2,5201 ; -0,4437 ; -0,7383)$

$\overrightarrow{OH_1} = H_1 - O = (-0,8943 ; 0,1508 ; 0,2584) \leftarrow$

$\overrightarrow{OH_2} = H_2 - O = (0,4884 ; 0,7456 ; 0,3081)$

Assim, o ângulo θ desejado será dado por

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{OH_1} \cdot \overrightarrow{OH_2}}{\|\overrightarrow{OH_1}\| \cdot \|\overrightarrow{OH_2}\|}, \text{ onde:}$$

$$\|\overrightarrow{OH_1}\| = \sqrt{(-0,8943)^2 + (0,1508)^2 + (0,2584)^2}$$

$$= \sqrt{0,79977249 + 0,02274064 + 0,06677056}$$

$$= 0,943018393245858$$

$$\|\overrightarrow{OH_2}\| = \sqrt{(0,4884)^2 + (0,7456)^2 + (0,3081)^2}$$

$$= \sqrt{0,23853456 + 0,55591936 + 0,09492561}$$

$$= 0,943069101391933.$$

Além disso:

$$\overrightarrow{OH_1} \cdot \overrightarrow{OH_2} = (-0,8943 ; 0,1508 ; 0,2584) \cdot (0,4884 ; 0,7456 ; 0,3081)$$

$$= -0,43677612 + 0,11243648 + 0,07961304$$

$$= -0,2447266$$

Por fim, temos:

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{OH_1} \cdot \overrightarrow{OH_2}}{\|\overrightarrow{OH_1}\| \cdot \|\overrightarrow{OH_2}\|} = \frac{-0,2447266}{0,943018393245858 \times 0,943069101391933}.$$

$$= \frac{-0,2447266}{0,889331508712432} = -0,275180399661982$$

$$\boxed{\theta \cong 105,9728^\circ}$$