Fundação Universidade Federal de Pelotas
Departamento de Matemática e Estatística
Curso de Lic. em Matemática
Primeira Prova de Cálculo III
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: GABARITO **Data:** 17/03/2022.

Questão 01. Seja (x_n) a sequência de números reais dada por $x_n = \dfrac{2^n}{1+2^n}$. Prove que (x_n) é convergente de duas formas:

(a) [1,0 pt] Mostrando que (x_n) é monótona e limitada.

(b) [1,0 pt] "Desconfiando" para quanto essa sequência converge, e disso usando a definição de limite de sequência para concluir.

Questão 02. [1,0 pt] Prove que a sequência de funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \frac{x^2 + nx}{n}$$

converge simplesmente para a função identidade $f(x) = x$.

Questão 03. [1,0 pt] Prove que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Questão 04. [0,5 pt cada] Verifique utilizando um método adequado se a série numérica dada em cada item converge ou diverge:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n! \cdot n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n+1}}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n^2}$

Questão 05. [1,0 pt] Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série de potências:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^{n-1}x^{n-1}}{\sqrt{n}}.$$

Questão 06. [1,0 pt] Desenvolva a série de Taylor para $f(x) = \operatorname{sen} 2x$ no ponto $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Questão 07. Considere a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, onde $|x| < 1$.

(a) [1,0 pt] A partir da série acima, encontre uma representação em séries de potências para $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, apresentando o seu raio de convergência.

(b) [1,0 pt] A partir do item anterior e usando integrais, encontre a representação em séries de potências para $\arctan x$. Qual é o seu raio de convergência?

(c) [1,0 pt] Conclua que o número irracional π pode ser escrito como a série numérica

$$\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$$

01) $x_n = \dfrac{2^n}{1+2^n}$

(a) Vamos mostrar que (x_n) é monótona e limitada.

AF.01 : (x_n) é monótona.

De fato,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1}}{1+2^{n+1}} \times \frac{1+2^n}{2^n} = \frac{\cancel{2^n}.2.(1+2^n)}{\cancel{2^n}.(1+2^{n+1})}$$

$$= \frac{2+2^{n+1}}{1+2^{n+1}} = \frac{1+1+2^{n+1}}{1+2^{n+1}} =$$

$$= \cancel{\frac{1+2^{n+1}}{1+2^{n+1}}} + \frac{1}{1+2^{n+1}} = 1 + \frac{1}{1+2^{n+1}} > 1.$$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} > x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, (x_n) é crescente, e, portanto, monótona.

AF.02 : (x_n) é limitada:

De fato; basta observar que, como

$$2^n < 1+2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

segue que

$$\frac{2^n}{1+2^n} < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{i.e.,} \quad 0 < x_n = \frac{2^n}{1+2^n} < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

i.e., (x_n) é limitada.

Pelas AF. 01 e 02 segue por teorema que a seq. (x_n) é convergente.

(b) Vamos mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1.$

Dado $\varepsilon > 0$. Precisamos achar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0$, implique em

$$|x_n - 1| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0 \qquad (*)$$

Vamos avaliar $|x_n - 1|$:

$$|x_n - 1| = \left| \frac{2^n}{1+2^n} - 1 \right| = \left| \frac{\cancel{2^n} - 1 - \cancel{2^n}}{1+2^n} \right| = \frac{1}{1+2^n}$$

Como $1 + 2^n > 2^n$, segue que $\frac{1}{1+2^n} < \frac{1}{2^n}$, e disso

$$|x_n - 1| = \frac{1}{1+2^n} < \frac{1}{2^n}.$$

Assim, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_0 > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}.$$

RASCUNHO

$\frac{1}{2^n} < \varepsilon$

$2^n > \frac{1}{\varepsilon}$

$n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$

Assim, $\forall n \geq n_0$, teremos $\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n_0}}$; e

$$|x_n - 1| < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n_0}} < \frac{1}{2^{\log_2 \frac{1}{\varepsilon}}} = \varepsilon.$$

Assim, mostramos que $x_n \to 1$.

---

02) Vamos mostrar que $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = x$, onde

$$f_n(x) = \frac{x^2 + nx}{n}.$$

Dado $\varepsilon > 0$. Precisamos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0$, implique em $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Analisando $|f_n(x) - f(x)|$:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x^2 + nx}{n} - x \right| = \left| \frac{x^2}{n} \right| = \frac{|x|^2}{n}.$$

Tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{|x|^2}{\varepsilon}$. Assim, $\forall n \geq n_0$, temos $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{|x|^2}$, e disso:

$$|f_n(x) - x| = \frac{|x|^2}{n} \leq \frac{|x|^2}{n_0} < \frac{|x|^2}{1} \cdot \frac{\varepsilon}{|x|^2} = \varepsilon.$$

RASCUNHO:

$$\frac{|x|^2}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{|x|^2}{\varepsilon}$$

$\square$

03) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$: De fato, escreva

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$$

$$= \frac{a(n+1)+bn}{n(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases} \qquad b=-1$$

Assim:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Seja $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ a soma parcial da série. Assim:

$$s_n = \underbrace{\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}}_{k=1} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}}_{k=2} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}}_{k=3} + \dots + \underbrace{\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}}_{k=n}$$

$$\Rightarrow s_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$ Logo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

04) (a) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$;

que é uma p-série (hiper-harmônica), com $p = \frac{3}{2} > 1$. Logo, a série é convergente.

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n!\,n}$.

Pelo teste da razão:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!(n+1)} \cdot \frac{n!\,n}{3^n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{3^n}\cdot 3\cdot \cancel{n!}\cdot n}{(n+1)\cdot\cancel{n!}\cdot(n+1)\cdot\cancel{3^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{n^2+2n+1} = 0 < 1.$$

Logo, a série dada é convergente.

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n+1}}$. (série alternada).

Pelo teste de Leibniz, temos:

$b = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$; e sendo:

$$2n+1 < 2(n+1)+1 = 2n+3$$

$$\Rightarrow \sqrt{2n+1} < \sqrt{2n+3} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2n+3}} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$, temos que

$b_{n+1} < b_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$; i.e., (b_n) é decrescente.

Além disso;

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0.$$

Assim, estamos nas hipóteses do Teste de Leibniz, donde segue que a série dada é <u>convergente</u>.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot e^{-n^2}$.

Defina $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = x \cdot e^{-x^2}.$$

Então: $f'(x) = x \cdot e^{-x^2}(-2x) + 1 \cdot e^{-x^2}$

$$f'(x) = \frac{1}{e^{x^2}} \cdot (-2x^2+1) < 0, \ \forall x \in (1, +\infty)$$

Então, sendo $f(n) = n e^{-n^2} = a_n$, estamos nas hipóteses do teste da integral.

Assim:

$$\lim_{b\to+\infty} \int_1^b f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b x \cdot e^{-x^2} dx \ ;$$

onde:

$$\int x \cdot e^{-x^2} dx = \int (-2x) \cdot e^{-x^2} \cdot \left(-\frac{1}{2} dx\right)$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-x^2} + c$$; e dunque:

$$\lim_{b \to +\infty} \int_1^b f(x)\, dx = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2}\right)\Bigg|_1^b =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} -\frac{1}{2}\left(e^{-b^2} - e^{-1}\right) =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} -\frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{1}{e^{b^2}}}_{\to 0} - \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2e} < \infty.$$

Dunque, la serie data è convergente.

---

05) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^{n-1} \cdot x^{n-1}}{\sqrt{n}} .$$

$$R = \frac{1}{\lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n \to +\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{3^{n-1}}{\sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{n+1}}{3^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{3^{n}}}{3\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{\cancel{3^{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{n+1}{n}}}_{\to 1} = \frac{1}{3}$$

Logo, $R = \frac{1}{3}$. (raio de convergência).

Intervalo de convergência: $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Verifiquemos nas extremidades:

- $x = +\frac{1}{3}$: temos a série numérica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot \cancel{3^{n-1}}}{\sqrt{n} \cdot \cancel{3^{n-1}}}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}. \quad \text{Sendo } b_n = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

temos pelo teste de Leibniz que:

(i) $b_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n$.

(ii) $\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Logo, a série converge em $x = \frac{1}{3}$.

• $x = -\frac{1}{3}$: teremos a série numérica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{\sqrt{n}} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cancel{(-1)^{n-1}} \cdot \cancel{3^{n-1}}}{\sqrt{n} \cdot \cancel{(-1)^{n-1}} \cdot \cancel{3^{n-1}}}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \text{; que é}$$

divergente, pois é hiper-harmônica com $p = \frac{1}{2} < 1$.

conclusão: o intervalo de convergência fica:

$$\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right].$$

---

06) $f(x) = \operatorname{sen} 2x \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 = 2^0$ em $x = \frac{\pi}{4}$.

$$f'(x) = 2 \cdot \cos 2x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$f''(x) = -2^2 \operatorname{sen} 2x \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2^2 \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = -2^2$$

$$f'''(x) = -2^3 \cdot \cos 2x \Rightarrow f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2^3 \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$f^{(4)}(x) = 2^4 \operatorname{sen} 2x \Rightarrow f^{(4)}(x) = 2^4 \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 2^4$$

$$f^{(5)}(x) = 2^5 \cos 2x \Rightarrow f^{(5)}(x) = 2^5 \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$f^{(6)}(x) = -2^6 \operatorname{sen} 2x \Rightarrow f^{(6)}(x) = -2^6 \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = -2^6$$

$$\vdots$$

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + \cdots$$

$$+ \frac{f'''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{3!}\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{f^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{4!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4 + \cdots$$

$$f(x) = 1 - \frac{2^2}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{2^4}{4!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4 - \frac{2^6}{6!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^6 + \cdots$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n}}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}$$

---

07) (a)

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| < 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2(n+1)}}{|x|^{2n}} < 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{|x|^{2n}}\cdot |x|^2}{\cancel{|x|^{2n}}} < 1$$

$$\Leftrightarrow |x|^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1.$$

$$\Rightarrow \boxed{R = 1}$$

(b) $$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot t^{2n} \cdot dt$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \int_0^x t^{2n}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\Bigg|_0^x$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

e temos que $R=1$ também, pois ao integrarmos uma série de pot. com o intuito de obter outra, o raio de convergência será o mesmo.

(c) $$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \, x^{2n+1}}{2n+1} .$$

Então, para $x = \frac{\sqrt{3}}{3} < 1$, temos:

$$\frac{\pi}{6} = \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2n+1} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot (3)^{\frac{2n+1}{2}}}{3^{2n} \cdot 3} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot \cancel{3^n} \cdot \sqrt{3}}{3^n \cdot \cancel{3^n} \cdot 3 \cdot (2n+1)}$$

$$\pi = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \cdot (2n+1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi = 2\sqrt{3} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \cdot 3^n}}$$