Fundação Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Bach. em Química e Bach. em Química industrial
Disciplina de Álgebra linear e Geometria analítica
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 05 de Exercícios - Matrizes invertíveis e Sistemas lineares

1. Resolva cada sistema linear abaixo, pelo método de eliminação Gaussiana (este método é simplesmente efetuar as operações elementares sobre linhas na matriz aumentada do sistema dado, de modo a reduzí-la à forma escalonada reduzida por linhas)

(a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$

2. Verifique se o sistema homogêneo abaixo possui uma solução não nula: [Um sistema linear é dito *homogêneo* quando os termos independentes de todas as equações forem nulos]

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 4y - z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 0 \end{cases}.$$

3. Resolva cada sistema linear abaixo, via operaçẽs elementares sobre linhas:

(a) $\begin{cases} x + 2y - 4z = -4 \\ 2x + 5y - 9z = -10 \\ 3x - 2y + 3z = 11 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ -3x + y - 2z = -7 \\ 5x + 3y - 4z = 2 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x + 5y - 8z = 4 \\ 3x + 8y - 13z = 7 \end{cases}$

4. Reduza cada uma das matrizes abaixo à forma canônica escalonada reduzida por linhas.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 8 & 8 & -1 & 26 & 19 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 5 & -9 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

5. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Encontre matrizes elementares E_1 e E_2 tais que $E_2E_1A = I$.

   (b) Escreva A^{-1} como um produto de matrizes elementares.

6. Mostre que se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$ é uma matriz elementar, então $ab = 0$.

7. Seja A uma matriz 3×3. Encontre uma matriz B para a qual BA é a matriz que resulta de A permutando as duas primeiras linhas e depois multiplicando a terceira linha por seis.

8. Sejam e_1, e_2 e e_3, respectivamente, as operações sobre linhas:
"Trocar as linhas ℓ_1 e ℓ_2"; "Substituir ℓ_3 por $7\ell_3$" e *" Substituir ℓ_2 por $-3\ell_1 + \ell_2$"*.
Determine as matrizes quadradas elementares de ordem 3 correspondentes E_1, E_2 e E_3.

9. Calcule a inversa das matrizes $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, caso existam.

10. Em que condições a matriz diagonal $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_n \end{pmatrix}$ é inversível e qual é sua inversa?

11. Seja a matriz quadrada $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. Calcule A^{-2}.

    Obs.: Note que $A^{-2} = (A^{-1})^2 = A^{-1} \cdot A^{-1}$.

12. Utilizando-se do algoritmo para obter inversas de matrizes, encontre a inversa A^{-1} de A em cada caso, se A for inversível.

    (a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

    (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (d) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

13. Sejam A, B e C matrizes $n \times n$ tais que $A = BC$. Prove que se B é invertível, entõ qualquer sequência de operações elementares sobre as linhas que reduz B a I_n, também reduz A a C.

14. Considere o sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + 2z = 2 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases} \tag{1}$$

    (a) Resolva-o aplicando operações elementares sobre linhas.

    (b) Reescrevendo o sistema (1) na notação matricial

$$Ax = b\,, \tag{2}$$

    podemos encontrar o valor da matriz-solução x, multiplicando (2) à esquerda por A^{-1}, se esta inversa existir. Encontre A^{-1} e obtenha o valor de x dessa forma. Compare sua resposta com a obtida no item anterior.