Fundação Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Bach. em Química e Bach. em Química industrial
Disciplina de Álgebra linear e Geometria analítica
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 07 de Exercícios - Espaços e subespaços vetoriais

1. Seja $\mathbb{R}^\infty$ o conjunto de todas as sequências infinitas de números reais, ou seja,

$$\mathbb{R}^\infty = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \,:\, x_i \in \mathbb{R}\},$$

munido da operações de adição

$$(x_1, x_2, ..., x_n, ...) + (y_1, y_2, ..., y_n, ...) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n, ...),$$

e multiplicação por escalar

$$\alpha(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n, ...).$$

Mostre que $\mathbb{R}^\infty$ munido das operações acima é um espaço vetorial.

2. Em $\mathbb{R}^n$ defina as operações

$$\vec{u} \oplus \vec{v} = \vec{u} - \vec{v} \quad \text{e} \quad \alpha \odot \vec{u} = -\alpha \cdot \vec{u}.$$

Quais axiomas de espaço vetorial são satisfeitos para $(\mathbb{R}^n, \oplus, \odot)$?

3. Mostre que os seguintes subconjuntos do $\mathbb{R}^4$ são subespaços vetoriais:

   (a) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\}$.

   (b) $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, 2x + y - t = 0 \text{ e } z = 0\}$.

4. Verifique se são espaços vetoriais os seguintes conjuntos:

   (a) o $\mathbb{R}^2$ munido da adição usual e a multiplicação $\alpha(x, y) = (\alpha x, 0)$.

   (b) o $\mathbb{R}^2$ munido da adição $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + 2x_2, y_1 + 2y_2)$ e a multiplicação por escalar usual.

   (c) o $\mathbb{R}^2$ munido da adição $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (y_1 + y_2, x_1 + x_2)$ e a multiplicação por escalar usual.

5. O conjunto $W = \{A \in M_{3\times3}(\mathbb{R}) \,:\, A \text{ é inversível}\}$ munido da adição usual de matrizes e o produto usual de um escalar por uma matriz é um subespaço vetorial de $M_{3\times3}(\mathbb{R})$? Justifique.

6. Seja $V = \mathbb{R}^2$ e considere o subconjunto

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,: xy \leq 0\}.$$

Desenhe $W \subset \mathbb{R}^2$ e verifique se W é um subespaço vetorial, justificando sua resposta.

7. Seja V o espaço vetorial real de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Quais dos seguintes conjuntos de funções são subespaços de V?

   (a) de todas as funções f tais que $f(x^2) = f(x)^2$.

   (b) de todas as funções f tais que $f(0) = f(1)$.

   (c) de todas as funções f tais que $f(-1) = 0$.

8. Seja V o espaço vetorial de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Seja V_p o subconjunto de todas as funções pares, i.e., tais que $f(-x) = f(x)$; e seja V_i o subconjunto de todas as funções ímpares, i.e., tais que $f(-x) = -f(x)$. Prove que V_p e V_i são subespaços de V.

9. **(Sel. Mestr. UFSM 2012/1)** Se $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2}$ é uma matriz 2×2, definimos o seu traço por $\mathrm{tr}\,(A) = a_{11} + a_{22}$. Mostre que o conjunto V das matrizes que têm traço igual a zero é um subespaço vetorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

10. Dizemos que uma função $f : A \to \mathbb{R}$ é limitada em A se existir $M > 0$ tal que, para todo $x \in A$, implique em $|f(x)| \leq M$ (tal M depende da f). Seja V o espaço vetorial de todas as funções reais de A em $\mathbb{R}$. Mostre que o conjunto

$$W = \{f : A \to \mathbb{R} \text{ tal que } \exists M > 0, \text{ tal que } |f(x)| \leq M, \forall x \in A\}$$

de todas as funções reais de A em $\mathbb{R}$ limitadas é um subespaço vetorial de V.