Fundação Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Bach. em Química e Bach. em Química Industrial
Primeira Prova de Álgebra linear e Geometria analítica
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: GABARITO . **Data:** 06/03/2022

Questão 01. Dados os pontos no espaço: $A(1, -2, 0)$; $B(-1, 1, 2)$; $C(2, -1, -1)$ e $D(-1, 2, 1)$, resolva cada item a seguir:

(a) [1,0 pt] Obtenha a área do paralelogramo formado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

(b) [1,0 pt] Obtenha a equação do plano (π) que contém os pontos A, B e C.

(c) [1,0 pt] Determine a equação da reta (r) que passa pelo ponto D e é perpendicular ao plano (π) do item anterior.

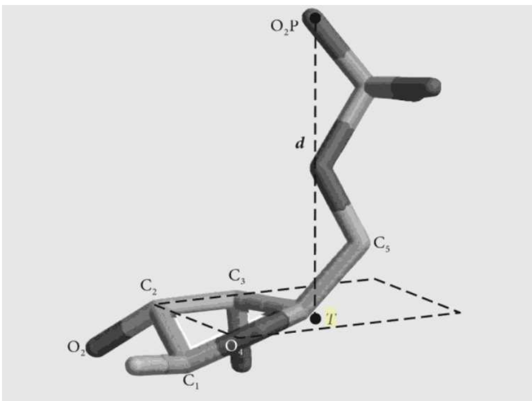
(d) [1,0 pt] Qual é a medida do volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$?

Questão 02. [1,0 pt] Determine o módulo da projeção do vetor $\vec{u}$ sobre o vetor $\vec{v}$, sendo $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = -\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

Questão 03. [1,0 pt] Um ion movendo-se através de uma solução possui duas forças agindo sobre si: uma força resistiva do meio com um vetor de $(3, \sqrt{7}, 3)$, e uma força eletromagnética de um campo elétrico com um vetor de $(-5, 3, 4)$. Qual é o ângulo entre estes dois vetores?

Questão 04. Abaixo temos a estrutura cristalina do fosfato de ribose. As coordenadas estão na estrutura e são as apresentadas na matriz abaixo. Para simplificar os cálculos, considere apenas as partes inteiras das coordenadas[1]. Por exemplo, considere $x_{C_2} = 119$ ao invés de $119,664$.

Átomo	x	y	z
O_2P	$115,394$	$41,169$	$129,137$
O_4	$120,546$	$41,818$	$127,822$
C_3	$119,237$	$43,428$	$126,672$
C_2	$119,664$	$42,262$	$125,771$



(a) [1,0 pt] Obtenha a equação do plano que contém os átomos C_2, C_3 e O_4.

(b) [1,0 pt] Obtenha a equação da reta (d) que passa pelo átomo O_2P e é perpendicular ao plano obtido no item anterior.

(c) [1,0 pt] Qual o ângulo formado pela ligação $O_4 - C_2 - C_3$?

Questão 05. [2,0 pt] Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{3\times 2}$ e $B = (b_{ij})_{2\times 2}$, definidas, respectivamente, por

$$a_{ij} = \begin{cases} i + 2j & \text{se } i > j \\ ij & \text{se } i \leq j \end{cases} \quad \text{e} \quad b_{ij} = \begin{cases} 2i + 3j & \text{se } i > j \\ i - 2j & \text{se } i \leq j \end{cases}.$$

Determine a matriz AB. Existe a matriz BA? Justifique.

[1] Na prática isso não poderia ser feito. No entanto, o faremos aqui apenas para tornar os cálculos menos "perturbadores".

GABARITO PROVA 01 DE ALGA

01)

(a) $\vec{AB} = B - A = (-1,1,2) - (1,-2,0) = (-2,3,2)$

$\vec{AC} = C - A = (2,-1,-1) - (1,-2,0) = (1,1,-1)$

a área S será:

$S = \|\vec{AB} \times \vec{AC}\|$, onde

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ -2 & 3 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right|$$

$$= -3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k} - 3\vec{k} - 2\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$= -5\vec{i} + 0\vec{j} - 5\vec{k} = (-5,0,-5)$$

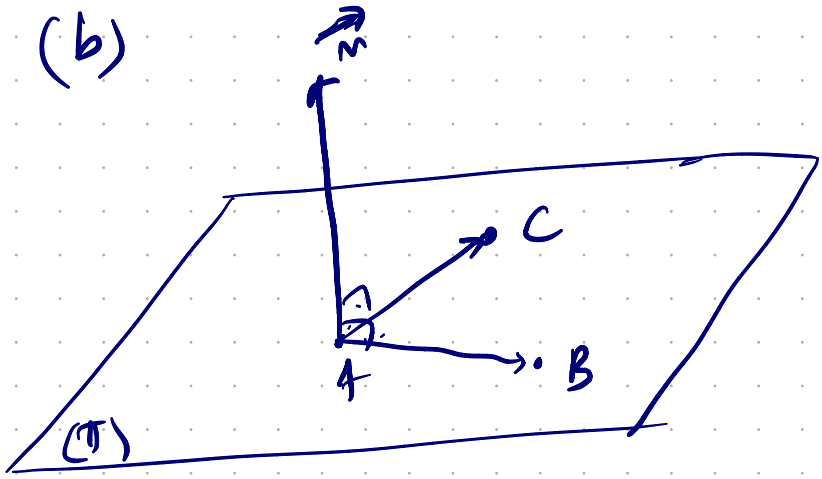
Assim,

$$S = \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2 + (-5)^2}$$

$$= \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = \sqrt{5^2 \cdot 2}$$

$$= 5\sqrt{2} \text{ unidades de área.}$$

(b)



$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = (-5, 0, -5),$$ c.f. item (a).

Assim, a eq. do plano (π) fica:

$$(\pi): -5x + 0y - 5z + d = 0$$

Como $A(1, -2, 0) \in (\pi)$; temos,

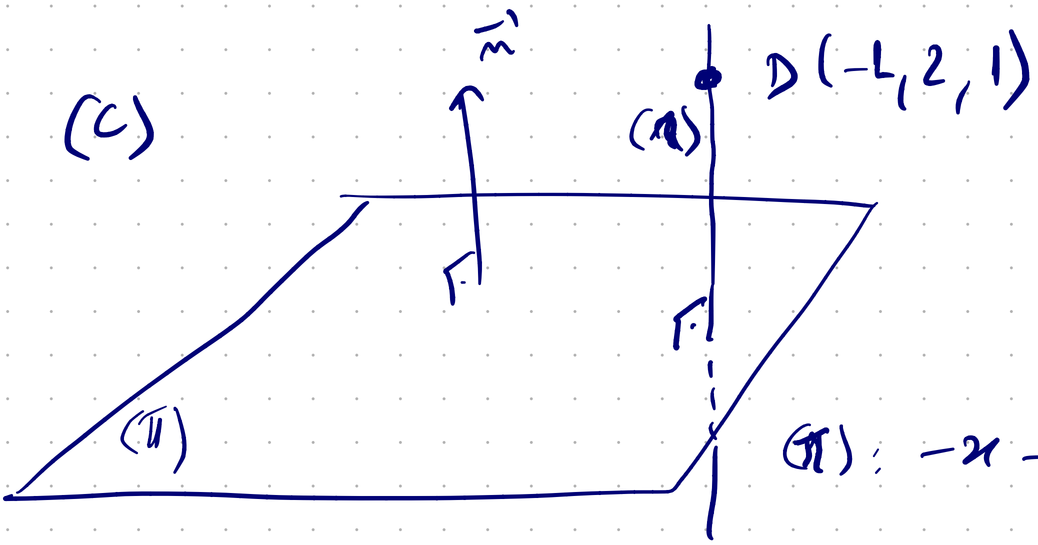
$$-5\cdot(1) - 2\cdot 0 - 5\cdot 0 + d = 0 \Rightarrow \boxed{d = 5}$$

Portanto:

$$(\pi): -5x - 5z + 5 = 0 \qquad (\div 5)$$

$$\boxed{(\pi): -x - z + 1 = 0}$$

(c)



$(\pi): -x - z + 1 = 0$

$(r) \perp (\pi)$. Logo, um vetor diretor para (r) pode ser $\vec{n} = (-5, 0, -5)$.
$= (a, b, c)$

Assim, a eq. da reta fica:

$$(r): \begin{cases} x = x_D + at \\ y = y_D + bt \\ z = z_D + ct \end{cases}$$

$$\boxed{(r): \begin{cases} x = -1 - 5t \\ y = 2 \\ z = 1 - 5t \end{cases}}$$

(d) $V = |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]|$; onde

$\vec{AB} = (-2, 3, 2)$; $\vec{AC} = (1, 1, -1)$; e

$\vec{AD} = D - A = (-1, 2, 1) - (1, -2, 0)$

$= (-2, 4, 1)$

Então:

$$[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = \left|\begin{matrix} -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} - & - & - & + & + & + \end{matrix}$$

$= -2 + 6 + \cancel{8} + 4 - \cancel{8} - 3 = 5$;

e disso, segue que

$V = |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = |5| = 5$ unidades de vol.

---

02) $\vec{u} = (2, -3, 1)$; $\vec{v} = (-1, -1, 2)$

Seja $\vec{w} = \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right) \cdot \vec{v}$,

onde:

$$\underbrace{\vec{u}\cdot\vec{v}} = (2,-3,1)\cdot(-1,-1,2) =$$
$$= 2\cdot(-1) + (-3)\cdot(-1) + 1\cdot 2$$
$$= \cancel{-2} + 3 + \cancel{2} = \underbrace{3} \quad ;$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(2)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

Assim:

$$\vec{w} = proj_{\vec{v}}\,\vec{u} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right)\cdot\vec{v} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{6}}\cdot(-1,-1,2) = \left(\frac{-3}{\sqrt{6}}, \frac{-3}{\sqrt{6}}, \frac{6}{\sqrt{6}}\right)$$

Por fim;

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{\left(\frac{-3}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{-3}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{6}{\sqrt{6}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{6}+\frac{9}{6}+\frac{36}{6}} = \sqrt{\frac{54}{6}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\Rightarrow \boxed{\|\vec{w}\| = 9}$$

03) $\vec{n} = (3, \sqrt{7}, 3)$

$\vec{e} = (-5, 3, 4)$

$$\cos\theta = \frac{\vec{n}\cdot\vec{e}}{\|\vec{n}\|\cdot\|\vec{e}\|} \text{ ; onde}$$

$$\vec{n}\cdot\vec{e} = (3, \sqrt{7}, 3)\cdot(-5, 3, 4)$$

$$= -15 + 3\sqrt{7} + 12 = -3 + 3\sqrt{7}$$

$$= -3(1+\sqrt{7})$$

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{(3)^2 + (\sqrt{7})^2 + (3)^2} = \sqrt{9+7+9} =$$

$$= \sqrt{25} = 5$$

$$\|\vec{e}\| = \sqrt{(-5)^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{25+9+16}$$

$$= \sqrt{50} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$$

Assim:

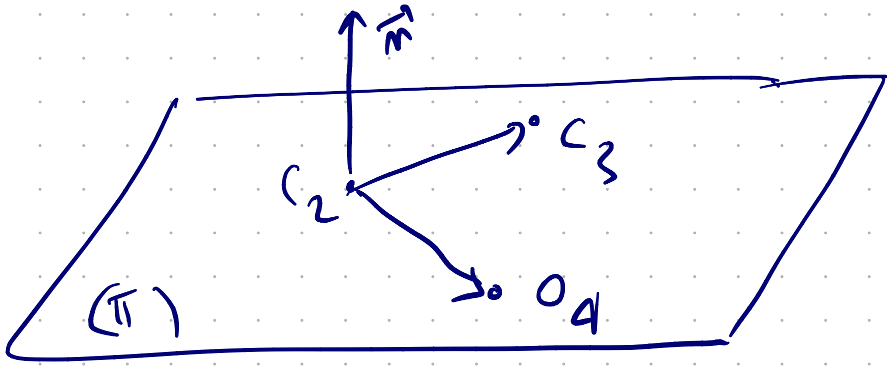
$$\cos\theta = \frac{\vec{n}\cdot\vec{e}}{\|\vec{n}\|\cdot\|\vec{e}\|} = \frac{-3\cdot(1+\sqrt{7})}{5\cdot 5\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{-3(1+\sqrt{7})}{25\sqrt{2}}$$

04) $C_2(119; 42, 125)$

$C_3(119, 43, 126)$

$O_4(120, 41, 127)$



$$\overrightarrow{C_2C_3} = C_3 - C_2 = (0, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{C_2O_4} = O_4 - C_2 = (1, -2, 1)$$. Logo:

$$\vec{n} = \overrightarrow{C_2C_3} \times \overrightarrow{C_2O_4} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right|$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \vec{i} + \vec{j} + 0\vec{k} - \vec{k} + 2\vec{i} + 0\vec{j} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{n} = (3, 1, -1)$$

Então, a eq. do plano (π) será:

(π): $3x + y - z + d = 0$.

Como $C_2(119, 42, 125) \in (\pi)$:

$$3.(119) + 42 - 125 + d = 0 \Rightarrow \boxed{d = 274}$$

Então; obtemos:

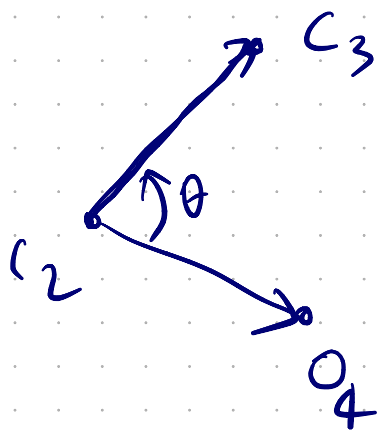
$$\boxed{(\pi): 3x + y - z + 274 = 0}$$

(b) $\vec{n} = (1, -2, 1)$ serve como vetor diretor da reta (d).

Sendo $O_2 P(115; 41, 129)$; vamos obter:

$$(d): \begin{cases} x = 115 + t \\ y = 41 - 2t \\ z = 129 + t \end{cases}$$

c)



$$\overrightarrow{C_2C_3} = C_3 - C_2 = (0, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{C_2O_4} = O_4 - C_2 = (1, -1, 2)$$

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{C_2C_3} \cdot \overrightarrow{C_2O_4}}{\|\overrightarrow{C_2C_3}\| \cdot \|\overrightarrow{C_2O_4}\|} \; ; \text{ and}$$

$$\overrightarrow{C_2C_3} \cdot \overrightarrow{C_2O_4} = (0, 1, 1) \cdot (1, -1, 2)$$

$$= 0 - 1 + 2 = 1$$

$$\|\overrightarrow{C_2C_3}\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\|\overrightarrow{C_2O_4}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

05) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}_{3\times 2}$; $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}_{2\times 2}$;

onde:

$a_{11} = 1.1 = 1$

$a_{12} = 1.2 = 2$

$a_{21} = 2 + 2.1 = 4$

$a_{22} = 2.2 = 4$

$a_{31} = 3 + 2.1 = 5$

$a_{32} = 3.2 = 6$

e

$b_{11} = 1 - 2.1 = -1$

$b_{12} = 1 - 2.2 = -3$

$b_{21} = 2.2 + 3.1 = 7$

$b_{22} = 2 - 2.2 = -2$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$

Assim,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 14 & -3 - 4 \\ -4 + 28 & -12 - 8 \\ -5 + 42 & -15 - 12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & -7 \\ 24 & -20 \\ 37 & -27 \end{pmatrix}$$

B.A não existe, pois

$B_{2\times 2} \cdot A_{3\times 2}$, o núm. de col. da 1ª é $\neq$ do nº de linhas da 2ª.