FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS REAIS

São funções do tipo $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \longmapsto f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_m), f_2(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$$

Ex.: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y,z) = (\underbrace{x + 2y - z}_{f_1(x,y,z)}, \underbrace{x^2 - 3\,\text{sen}(z+y)}_{f_2(x,y,z)})$$

$\mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$; $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$, com $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$; as funções f_i são chamadas de FUNÇÕES COORDENADAS da f.

Todas as transformações lineares estudadas na Álgebra linear $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ são funções de várias variáveis reais (e lineares)

↳ ou seja, cada função coordenada é uma função linear.

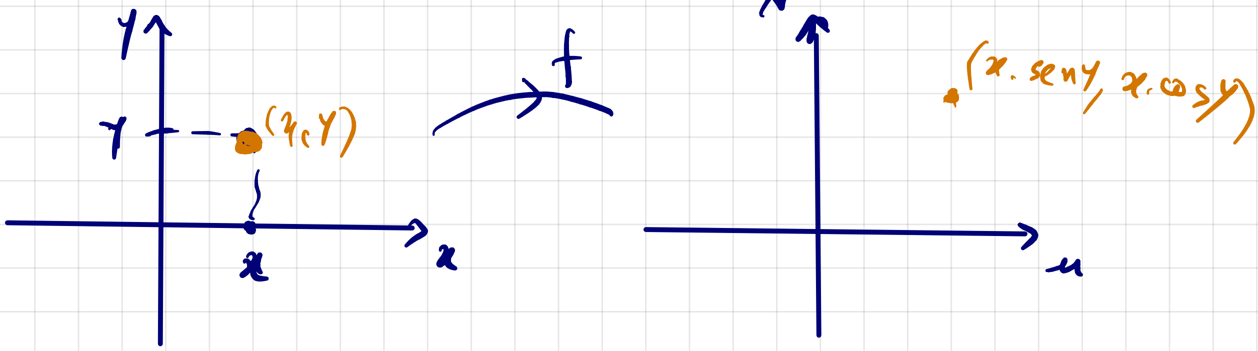
Outros exemplos:

01) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $f(x,y) = (x \cdot \text{sen}\, y, x \cdot \cos y)$

Neste caso temos as funções coordenadas:

$$f_1(x,y) = x \cdot \operatorname{sen} y$$

$$f_2(x,y) = x \cdot \cos y$$

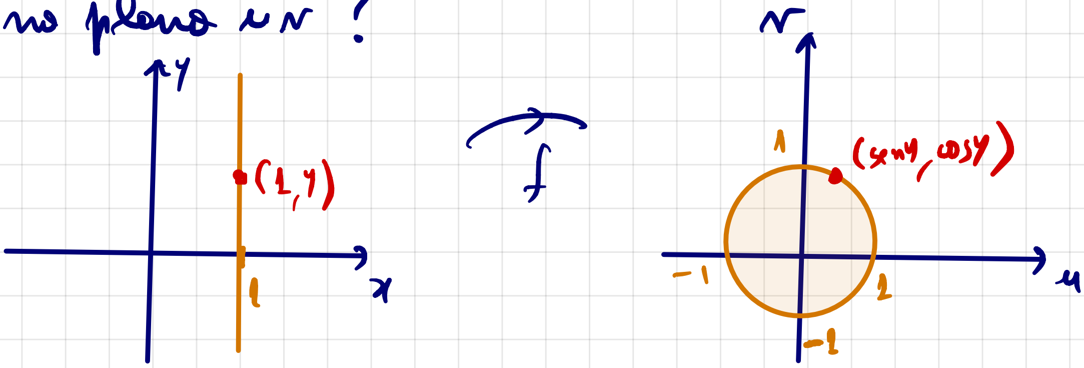


Neste caso, podemos apresentar alguma descrição ou propriedade. Veja que:

$$(x \cdot \operatorname{sen} y)^2 + (x \cdot \cos y)^2 = x^2 \operatorname{sen}^2 y + x^2 \cos^2 y$$

$$= x^2 \underbrace{(\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y)}_{=1} = x^2$$

Por exemplo, tome a reta $x = 1$ no plano xy. É possível descrever no que ela se transforma no plano uv?

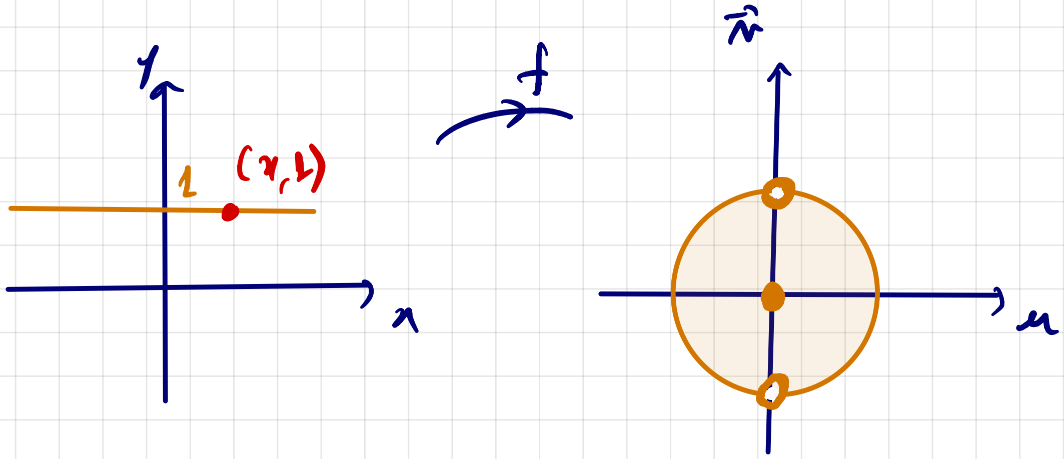


Quando $x = 1$ e $y \in \mathbb{R}$, temos:

$$f(x,y) = f(1,y) = (1 \cdot \operatorname{sen} y, 1 \cdot \cos y)$$

$$= (\operatorname{sen} y, \cos y); \quad \text{onde} \quad \operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1.$$

E a reta $y=1$ se transforma em que curva no plano uv?



$f(x,1) = (\underline{x.\,\text{sen}\,1},\ x\cos 1)$, onde

$x^2\text{sen}^2 1 + x^2\cos^2 1 = x^2 + x^2 = 2x^2$

$$\left.\begin{array}{l} u = x\,\text{sen}\,1 \\ v = x\cdot\cos 1 \end{array}\right\} \quad u^2+v^2 = 2x^2$$

$\hookrightarrow$ $x \neq 0 \rightarrow$ circunferência de raio $\sqrt{2}x$

$x = 0 \Rightarrow$ ORIGEM, pois

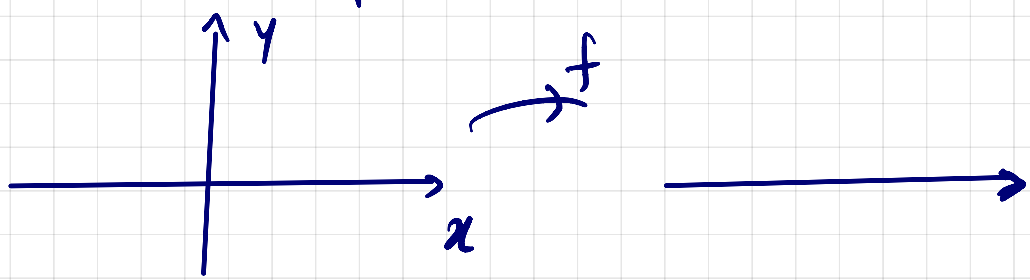
$u^2+v^2 = 0$

$\Leftrightarrow u = v = 0$

02) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x,y) = x^2+y^2$

Esboce $z = f(x,y)$.



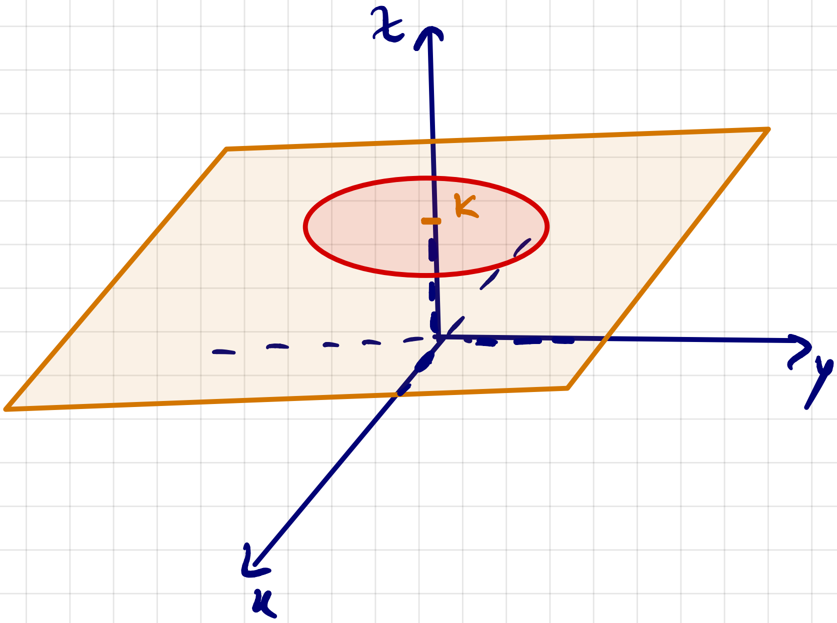
$Im(f) = ?$

$f(x,y) = x^2 + y^2 \geq 0$

Logo; $Im(f) = [0, +\infty)$

$z = f(x,y)$ é a imagem ou altura.

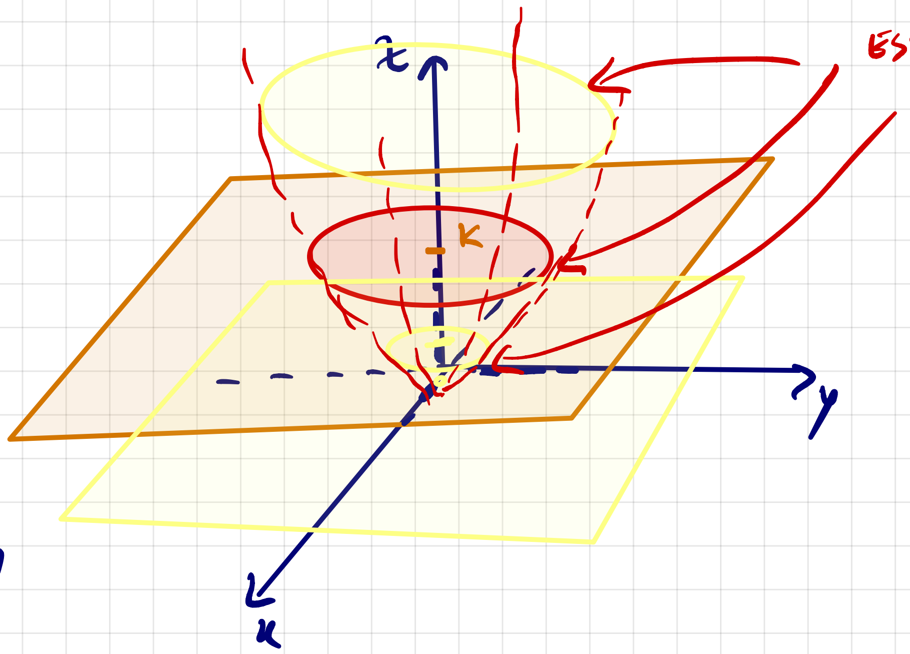
Ou seja, podemos representar no $\mathbb{R}^3$ o gráfico de uma $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, onde o domínio é o plano xy e a imagem fica no eixo z; obtendo o ponto $P(x, y, \underbrace{f(x,y)}_{z})$



Fixando $z = k$, obtemos a equação

$$\boxed{x^2 + y^2 = k}$$

, que é uma circunferência centrada na origem e raio $\sqrt{k}$, desenhada no plano $z = k$.



ESTAS CURVAS QUANDO $z=k$ CHAMAM-SE CURVAS DE NÍVEL.

em cada plano $z=k$ temos a circunferência $x^2+y^2=k$. Em $z=0$, ou seja, no plano xy, temos $k=0$, e disso obtemos $x^2+y^2=0 \Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$ (ORIGEM)

Ou seja funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ podemos traçar um esboço gráfico no $\mathbb{R}^3$. No geogebra podemos montar vários exemplos.

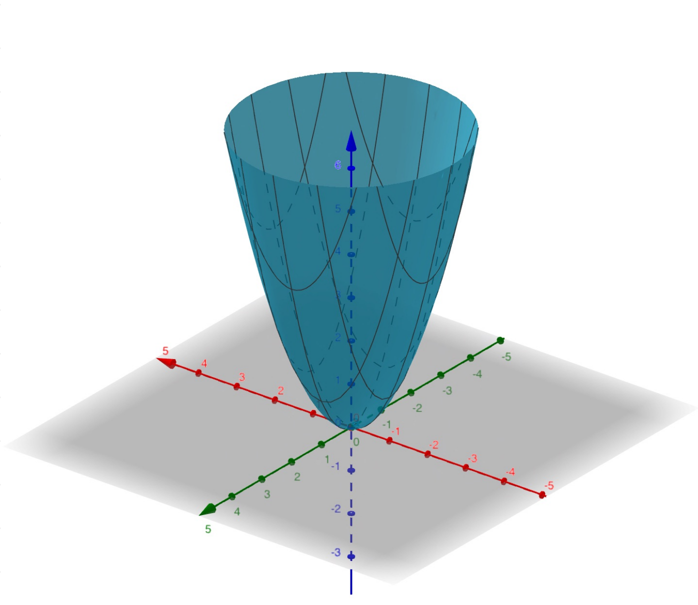


GRÁFICO DE $f(x,y)=x^2+y^2$ feito no GEOGEBRA.

03) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-4y^2}$

$D(f) = ?$

Note que $1 - x^2 - 4y^2 \geq 0$. Então:

$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 - 4y^2 \geq 0\}$

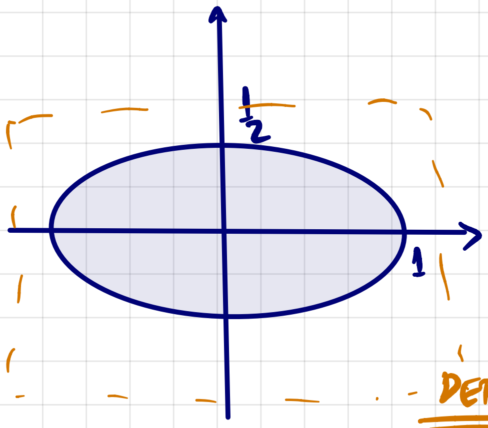
Veja que $1 - x^2 - 4y^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow -x^2 - 4y^2 \geq -1 \quad (x-1)$

$\Leftrightarrow x^2 + 4y^2 \leq 1.$

$\Leftrightarrow x^2 + \dfrac{y^2}{\frac{1}{4}} \leq 1.$

GRÁFICO DO DOMÍNIO:



O DOMÍNIO É UM COMPACTO DO $\mathbb{R}^2$.

DEF.: Um compacto em um espaço métrico é um conjunto que é limitado e fechado.

E o gráfico de f?

Tome $z = f(x,y) = \sqrt{1-x^2-4y^2}$

Elevando ao quadrado, vamos obter:

$$z^2 = 1 - x^2 - 4y^2 \iff x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$$

$$\iff \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} + \frac{z^2}{1} = 1$$

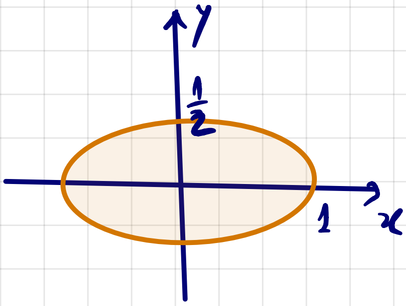
(elipsóide)

Só nos interessa onde $z \geq 0$, pois $z = \sqrt{1 - x^2 - 4y^2}$

traços: • plano xy : ($z=0$)

então, teremos

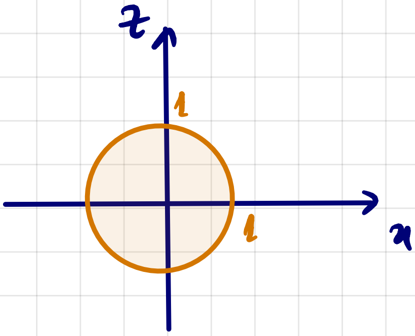
$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1. \quad \text{(elipse)}$$



• plano xz ($y=0$):

teremos:

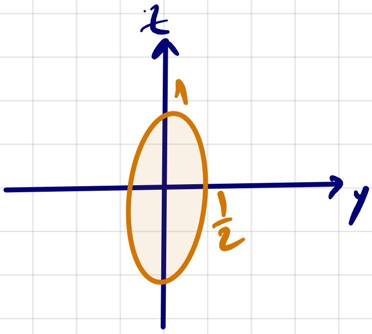
$$x^2 + z^2 = 1 \quad \text{(circunferência)}$$



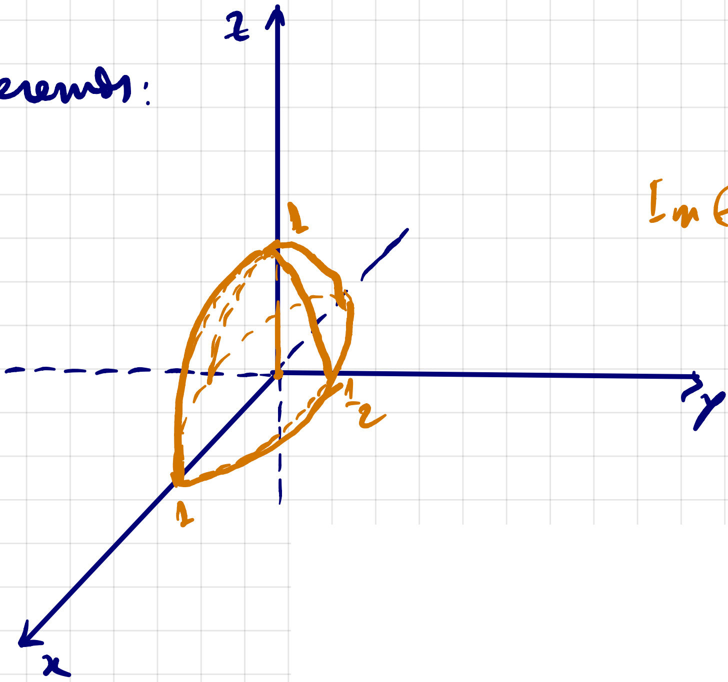
• plano yz ($x=0$): teremos:

$$4y^2 + z^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y^2}{\frac{1}{4}} + \frac{z^2}{1} = 1 \qquad (\text{elipse}$$

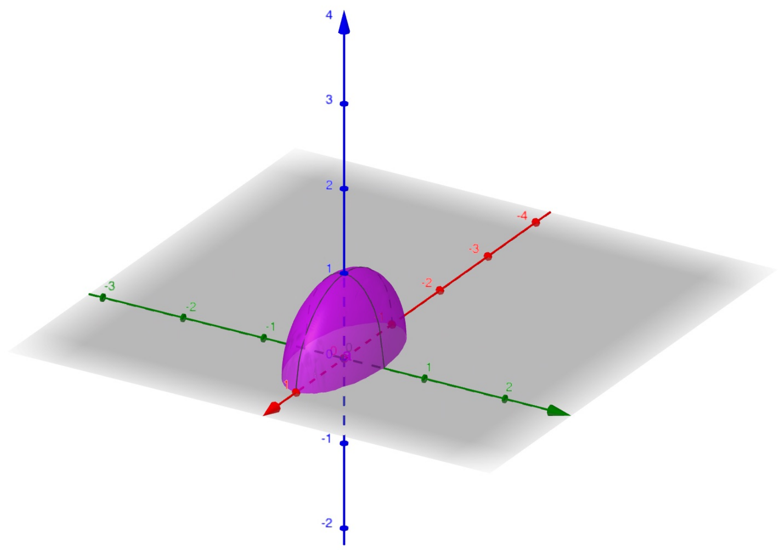


Por fim, teremos:



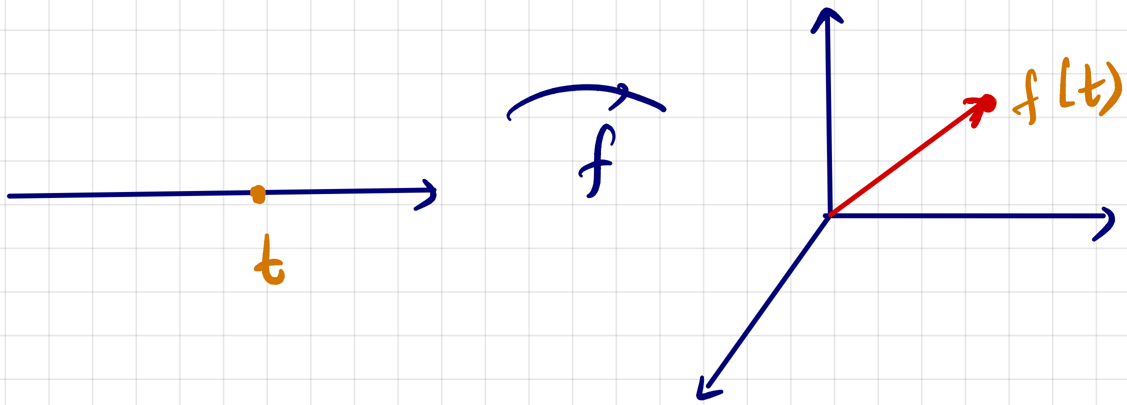
$Im(f) = [0,1]$

USANDO O GEOGEBRA.



03) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (FUNÇÃO VETORIAL DE 1 VARIÁVEL REAL)

$$t \longmapsto f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$$



Ex.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$f(t) = (t, \operatorname{sen} t, \cos t)$$

Neste caso, temos:

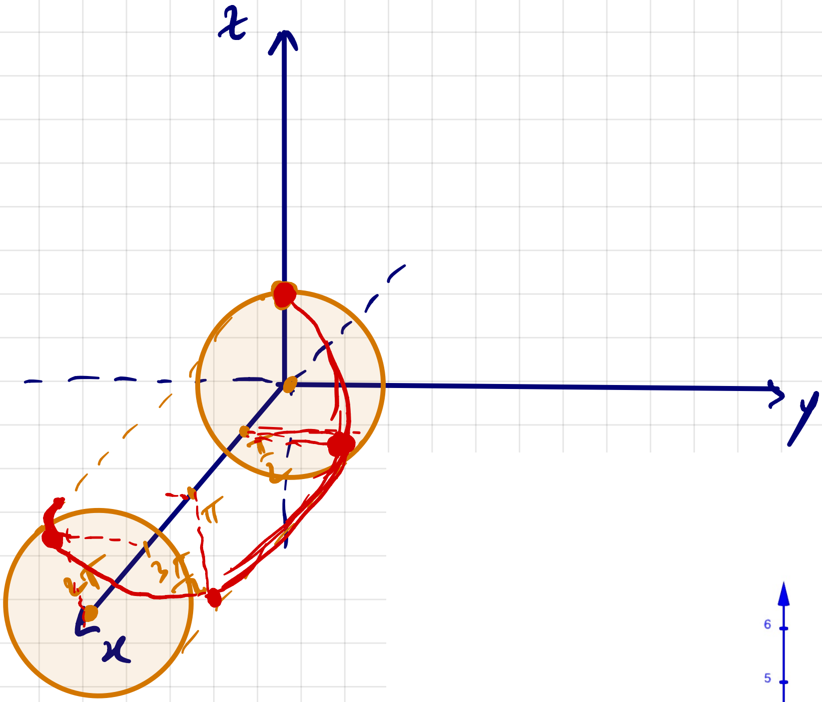
$$\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = \operatorname{sen} t \\ z = \cos t \end{array}\right. \quad y^2 + z^2 = \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

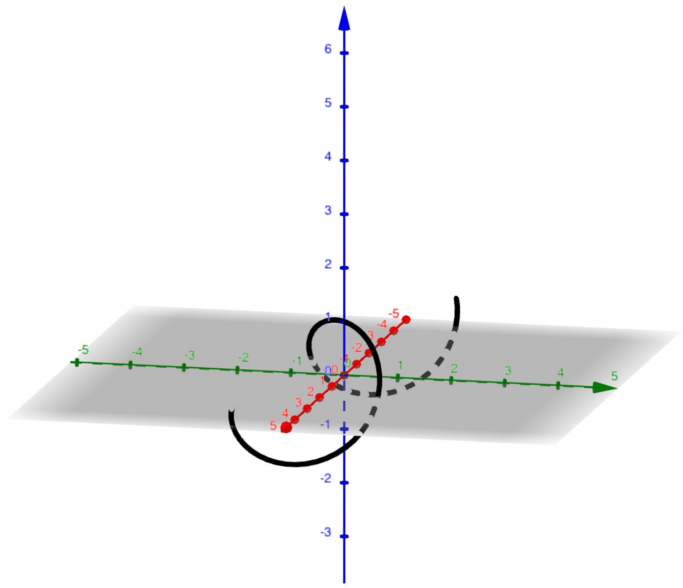
$$y^2 + z^2 = 1$$

(circunferência)

Mas $x = t$ está "livre".

$x = t$	$y = \operatorname{sen} t$	$z = \cos t$
0	0	1
$\frac{\pi}{2}$	1	0
π	0	-1
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
2π	0	1





espiral (geogebra)