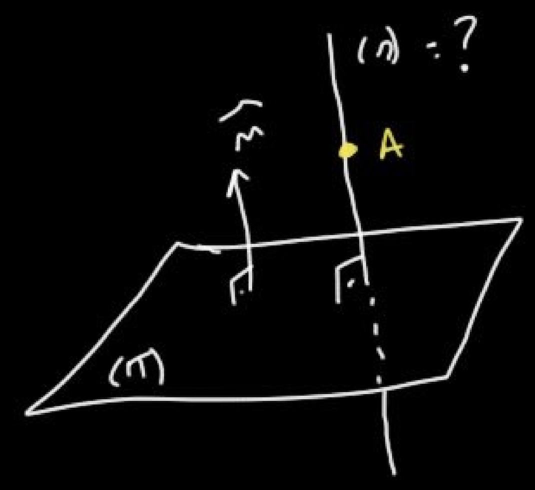
LISTA 03

9. Obtenha a equação da reta que passa pelo ponto $A(4,-5,20)$ e é perpendicular ao plano $4x - 2y + z - 7 = 0$.



$(\pi): \; ax + by + cz + d = 0$

$(\pi): \; 4x + 2y + z - 7 = 0$

$\vec{n} = (4, 2, 1)$ serve como vetor diretor da reta (r).

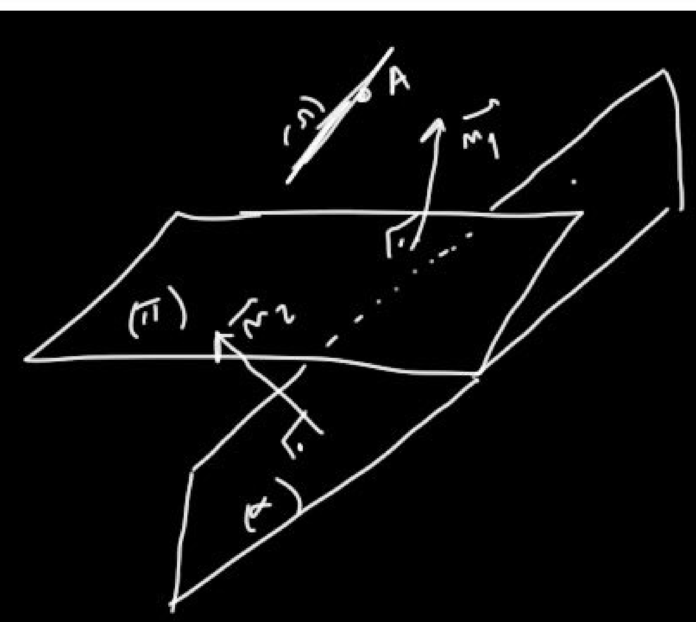
Assim, vamos obter:

$$(r): \begin{cases} x = x_A + a t \\ y = y_A + b \cdot t \\ z = z_A + c \cdot t \end{cases}$$

$$(r): \begin{cases} x = 4 + 4t \\ y = -5 + 2t \\ z = 20 + 1t \end{cases}$$

L3

10. Determine a equação da reta (r) que passa pelo ponto $A(2,0,-4)$ e é paralela a cada um dos planos $(\pi): \; 2x + y - z = 0$ e $(\alpha): \; x + 3y - 5z = 0$.



$\vec{u}$: vetor diretor da reta (r)

$\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$,

onde $\vec{n}_1 = (2, 1, -1)$ e

$\vec{n}_2 = (1, 3, -5)$. Assim:

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \left| \begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -5 & 1 & 3 \end{array} \right|$$

$= -5\vec{i} - 1\vec{j} + 6\vec{k} - 1\vec{k} + 3\vec{i} + 10\vec{j} = -2\vec{i} + 9\vec{j} + 5\vec{k}$

$= (-2, 9, 5) = (a, b, c)$

Assim, a eq. da reta (r) será:

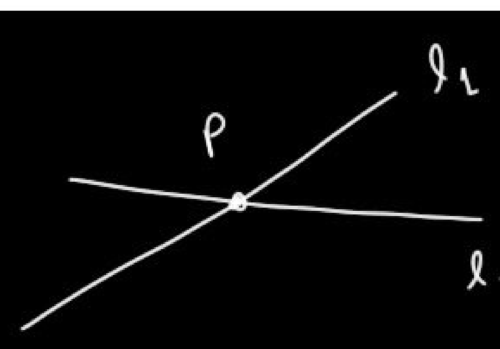
$$(r): \begin{cases} x = x_A + a t \\ y = y_A + b \cdot t \\ z = z_A + c \cdot t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 0 + 9t \\ z = -4 + 5t \end{cases}$$

L_3

17. Mostre que as retas de equações

$$\ell_1 : \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 3 + t \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \ell_2 : \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 + 6t \\ z = 2 - \frac{5}{2}t \end{cases}$$

se interseptam e obtenha uma equação do plano que elas determinam.



$P = (l_1) \cap (l_2)$. se, e só se,

$x_{l_1} = x_{l_2}$; $y_{l_1} = y_{l_2}$; $z_{l_1} = z_{l_2}$

$1 + 5t = 3 \Rightarrow t = \frac{2}{5}$

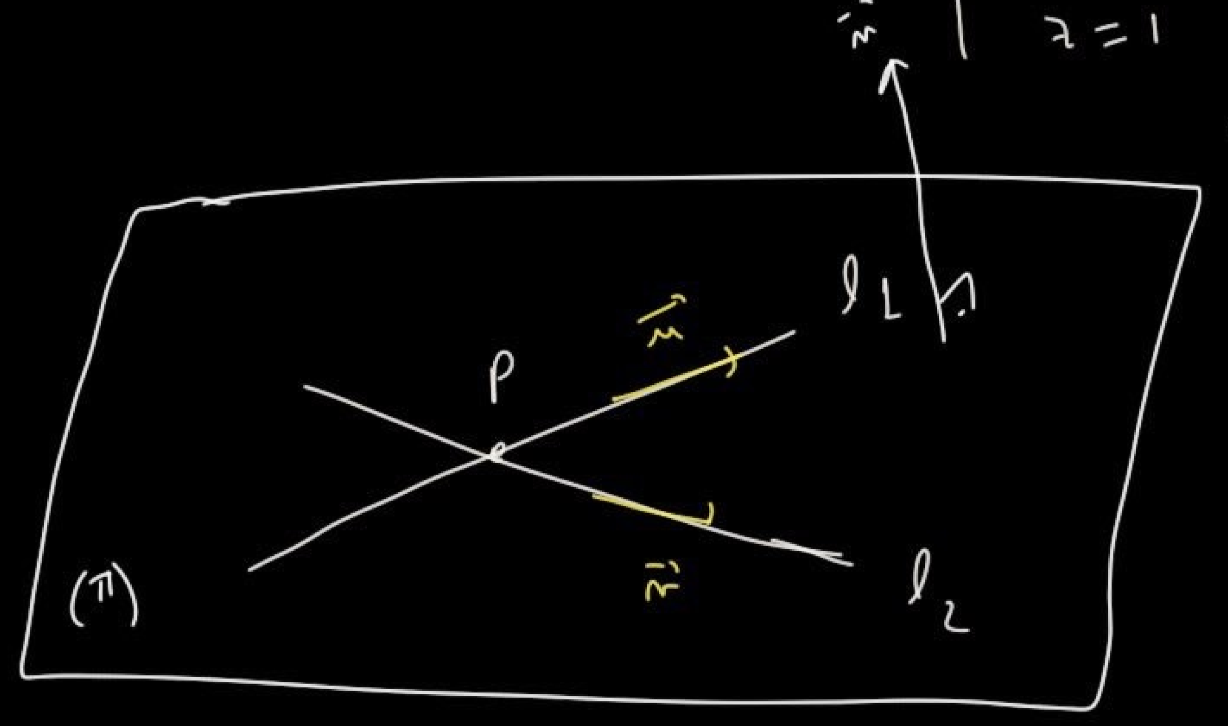
$3 + t = 1 + 6t \Rightarrow t = \frac{2}{5}$

$1 = 2 - \frac{5}{2}t \Rightarrow t = \frac{2}{5}$

$P = (l_1) \cap (l_2)$. $\rightsquigarrow t = \frac{2}{5}$

$$\begin{cases} x = 1 + \cancel{5} \cdot \frac{2}{\cancel{5}} = 3 \\ y = 3 + \frac{2}{5} = \frac{17}{5} \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{P\left(3, \frac{17}{5}, 1\right)}$$



Sejam

$\vec{u} = (5, 1, 0)$ e

$\vec{v} = (0, 6, -\frac{5}{2})$. os

vetores diretores de (l_1) e (l_2), respectivamente.

Então, o vetor $\vec{n}$ normal ao plano será:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -\frac{5}{2} \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 5 & 1 \\ 0 & 6 \end{matrix}$$

$$= -\frac{5}{2}\vec{i} + 0\vec{j} + 30\vec{k} - 0\vec{k} - 0\vec{i} + \frac{25}{2}\vec{j}$$

$$= -\frac{5}{2}\vec{i} + \frac{25}{2}\vec{j} + 30\vec{k} = \left(\underbrace{-\frac{5}{2}}_{a}, \underbrace{\frac{25}{2}}_{b}, \underbrace{30}_{c}\right)$$

Assim a eq. do plano (π) será:

(π): $ax + by + cz + d = 0$

(π): $-\frac{5}{2}x + \frac{25}{2}y + 30z + d = 0$. $P \in (\pi)$:

$$-\frac{5}{2} \cdot 3 + \frac{25}{2} \cdot \frac{17}{\cancel{5}} + 30 \cdot 1 + d = 0$$

$$\underbrace{-\frac{15}{2} + \frac{85}{2}} + 30 + d = 0$$

$$35 + 30 + d = 0 \Rightarrow \boxed{d = -65}$$

Portanto, a eq. do plano (π) será:

(π): $-\frac{5}{2}x + \frac{25}{2}y + 30z - 65 = 0$ $(\times 2)$

$$\boxed{(\pi): -5x + 25y + 60z - 130 = 0}$$

LISTA 04

2. Encontre a matriz $A = (a_{ij})_{4\times4}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} i^2 - 2j & \text{se } i \leq j \\ j^2 - ij & \text{se } i > j \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \cdots & & a_{24} \\ a_{31} & \cdots & & a_{34} \\ a_{41} & \cdots & & a_{44} \end{pmatrix}; \text{ onde:}$$

$i > j$

$a_{11} = 1^2 - 2.1 = -1$

$i \leq j$

$a_{12} = 1^2 - 2.2 = -3$

$a_{13} = 1^2 - 2.3 = -5$

$a_{14} = 1^2 - 2.4 = -7$

$a_{21} = 1^2 - 2.1 = -1$

$a_{22} = 2^2 - 2.2 = 0$

$i \leq j$

$a_{23} = 2^2 - 2.3 = -2$

$a_{24} = 2^2 - 2.4 = -4$

$a_{31} = 1^2 - 3.1 = -2$

$a_{32} = 2^2 - 3.2 = -2$

$a_{33} = 3^2 - 2.3 = 3$

$a_{34} = 3^2 - 2.4 = 1$

$a_{41} = 1^2 - 4.1 = -3$

$a_{42} = 2^2 - 4.2 = -4$

$a_{43} = 3^2 - 4.3 = -3$

$a_{44} = 4^2 - 2.4 = 8$

Portanto, obtemos:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 & -7 \\ -1 & 0 & -2 & -4 \\ -2 & -2 & 3 & 1 \\ -3 & -4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

4. Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & y & 5 \\ 2 & 3 & z \end{pmatrix}$ e $D = (d_{ij})$ uma matriz diagonal de ordem 3. Determine os valores de x, y e z para os quais se verifique

$$AD = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 6 & 12 & 25 \\ 4 & 9 & 20 \end{pmatrix}.$$

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$A \cdot D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 6 & 12 & 25 \\ 4 & 9 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & y & 5 \\ 2 & 3 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 6 & 12 & 25 \\ 4 & 9 & 20 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} ax = 2 \\ \boxed{b = 3} \\ 2c = 10 \rightsquigarrow \boxed{c = 5} \end{cases}$

$\begin{cases} 3a = 6 \rightsquigarrow \boxed{a = 2} \\ b \cdot y = 12 \\ 5c = 25 \rightsquigarrow c = 5 \end{cases}$

$3y = 12$

$y = 4$

$ax = 2$

$a = 2$

$2x = 2$

$\Rightarrow x = 1$

Resp.: $x = 1$; $y = 4$; $z = 4$.

$z \cdot c = 20$; $c = 5$ $\rightsquigarrow 5z = 20 \Rightarrow z = 4$

L4

13. Suponha que A seja uma matriz inversível. Mostre que se $AB = AC$, então $B = C$. Dê um exemplo de uma matriz não nula A tal que $AB = AC$, mas $B \neq C$.

$\exists\ A^{-1}$ tal que $A \cdot A^{-1} = I$ e $A^{-1} \cdot A = I$

Suponha $A \cdot B = A \cdot C$.

multiplicando à esquerda por A^{-1}, obtemos

$$A^{-1} \cdot (A \cdot B) = A^{-1} \cdot (A \cdot C)$$

Pela associatividade, vem:

$$\underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{= I} \cdot B = \underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{= I} \cdot C$$

$$\underbrace{I \cdot B}_{= B} = \underbrace{I \cdot C}_{= C} \Rightarrow \boxed{B = C}$$

Para a segunda parte do exercício, pense em uma matriz A não inversível. Por exemplo, use

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$ que

não será inversível (veremos a posteriori)