Fundação Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Bach. em Química e Bach. em Química industrial
Disciplina de Álgebra linear e Geometria analítica
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 04 de Exercícios - Matrizes e algumas Aplicações

1. Sejam $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, calcule $3A + 4B - 2C$.

2. Encontre a matriz $A = (a_{ij})_{4\times 4}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} i^2 - 2j & \text{se } i \leq j \\ j^2 - ij & \text{se } i > j \end{cases}$.

3. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, determine a matriz AB. Existe a matriz BA? Justifique.

4. Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & y & 5 \\ 2 & 3 & z \end{pmatrix}$ e $D = (d_{ij})$ uma matriz diagonal de ordem 3. Determine os valores de x, y e z para os quais se verifique

$$AD = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 6 & 12 & 25 \\ 4 & 9 & 20 \end{pmatrix}.$$

5. É verdade que se $A \cdot B = 0$, então $B \cdot A = 0$?

6. O estudo de simetria desempenha um papel vital em análise da estrutura, ligação e espectroscopia da molécula. Uma operação de simetria é definida como uma operação realizada em uma molécula que a deixa aparentemente inalterada. Por exemplo, se uma molécula de água é girada em 180° em torno de uma linha perpendicular ao plano molecular e passando pelo átomo central de oxigênio, a estrutura resultante é indistinguível da original. Considere um caso geral de uma rotação de uma molécula de θ graus em torno do eixo z. Se um dado átomo tem coordenadas iniciais (x_1, y_1, z_1), após girar θ graus em torno do eixo z, mostra-se que ele terá coordenadas (x_2, y_2, z_2), onde

$$x_2 = x_1 \cos\theta - y_1 \operatorname{sen}\theta$$

$$y_2 = x_1 \operatorname{sen}\theta + y_1 \cos\theta$$

$$z_2 = z_1,$$

ou, matricialmente,

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

   (a) Com a matriz de rotação acima, se uma molécula da água girar 180°, identificando um dos seus átomos pelo ponto $A(x_1, x_2, x_3)$, após a rotação o mesmo átomo ocupará qual ponto no espaço?

   (b) Se a molécula da água girar α graus e depois girar β graus, seria equivalente a girar $\alpha + \beta$ graus? Justifique como interpretar isso matricialmente.

7. Em um projeto de pesquisa sobre dieta participam adultos e crianças de ambos os sexos. A distribuição dos participantes no projeto é dada pela matriz

adulto	criança	
80	120	sexo masculino
100	200	sexo feminino

O número de gramas diário de proteínas e carboidratos consumido pelas crianças e adultos é dado pela matriz

proteína	gordura	carboidrato	
20	20	20	adulto
10	20	30	criança

(a) Quantos gramas de proteína são consumidos diariamente por homens no projeto?

(b) Quantos gramas de gordura são consumidos diariamente por mulheres no projeto?

8. Mostre através de um exemplo que na álgebra das matrizes, pode acontecer que o produto de dois elementos não nulos pode resultar no neutro aditivo (matriz nula).

9. Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{pmatrix}$. Se A for simétrica, ou seja, se $A^t = A$, encontre o valor de x.

10. Se A e B são matrizes quadradas e A é inversível, verifique que

$$(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B).$$

11. **Definição 1** Dizemos que uma matriz quadrada A é *idempotente* se

$$A^2 = A.$$

De acordo com a definição acima

(a) Mostre que se A é idempotente, então $I - A$ também é idempotente.

(b) Mostre que se A é idempotente, então $2A - I$ é invertível e é sua própria inversa.

12. Mostre que, se A for uma matriz invertível, então A^t também é invertível, com $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

13. Suponha que A seja uma matriz inversível. Mostre que se $AB = AC$, então $B = C$. Dê um exemplo de uma matriz não nula A tal que $AB = AC$, mas $B \neq C$.