Fundação Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Bach. em Química e Bach. em Química industrial
Disciplina de Álgebra linear e Geometria analítica
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 02 de Exercícios - Vetores no $\mathbb{R}^3$

1. Determine a distância entre os pontos A e B em cada item abaixo:

   (a) $A(3,4,2)$ e $B(1,6,3)$. (b) $A(2,-4,1)$ e $B(\frac{1}{2},2,3)$. (c) $A(-1,2,4)$ e $B(2,2,-2)$.

2. Mostre que os pontos $A(1,-1,3)$, $B(2,1,7)$ e $C(4,2,6)$ são vértices de um triângulo retângulo.

3. Determine o vetor $\vec{v}$, sabendo que $(3,7,1)+2\vec{v}=(6,10,4)-\vec{v}$.

4. Dados os vetores $\vec{u}=(1,2,3)$ e $\vec{v}=(3,-2,1)$ em $\mathbb{R}^3$, calcule:

   (a) $2\cdot\vec{u}-3\cdot\vec{v}$ (b) $\vec{u}+2\cdot\vec{v}$ (c) $||\vec{u}+\vec{v}||$ (d) $||2\cdot\vec{v}-5\vec{v}||$

5. Dados os pontos $A(3,m-1,4)$ e $B(8,2m-1,m)$, determine o valor de m de modo que $||\overrightarrow{AB}||=\sqrt{35}$.

6. Dados os pontos $P_1(4,-1,3)$ e $P_2(2,2,2)$, determine o versor do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$.

7. Dados os vetores $\vec{u}=(2,-3,1)$, $\vec{v}=(1,0,2)$ e $\vec{w}=(-2,1,0)$, calcule:

   (a) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})$ (b) $(\vec{u}-\vec{v})\cdot\vec{w}$ (c) $2\cdot\vec{u}\cdot\vec{w}$

8. Dados os pontos $A(2,-3,0)$, $B(1,1,-1)$ e $C(2,3,1)$.

   (a) Obtenha o vetor $\overrightarrow{CM}$, sendo M o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.
   (b) Os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CM}$ são ortogonais?
   (c) Encontre a equação da esfera de centro em C e cujo raio é numericamente igual ao comprimento do vetor $\overrightarrow{CM}$.

9. Calcule o valor de $\vec{i}\cdot\vec{j}$, $\vec{i}\cdot\vec{k}$ e $\vec{k}\cdot(\vec{i}+\vec{j})$.

10. Dados os vetores $\vec{u}=(1,2,-3)$, $\vec{v}=(2,0,-1)$ e $\vec{w}=(3,1,0)$, determine o vetor $\vec{s}$ tal que $\vec{s}\cdot\vec{u}=-16$, $\vec{s}\cdot\vec{v}=0$ e $\vec{s}\cdot\vec{w}=3$.

11. Calcular $||\vec{u}+\vec{v}||$, $||\vec{u}-\vec{v}||$ e $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$, sabendo que $||\vec{u}||=4$, $||\vec{v}||=3$ e o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de $60°$.

12. Determine o valor de m para que os vetores $\vec{u}=m\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$ e $\vec{v}=2\vec{i}+(1-2m)\vec{j}+3\vec{k}$ sejam ortogonais.

13. Determine o ângulo entre os vetores $\vec{u}=(2,-1,-1)$ e $\vec{v}=(-1,-1,2)$.

14. Determine o vetor $\vec{u}$ tal que $||\vec{u}||=2$, o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}=(1,-1,0)$ é $45°$ e $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{w}=(1,1,0)$.

15. Seja o triângulo de vértices em $A(3,4,4)$, $B(2,-3,4)$ e $C(6,0,4)$, determine o ângulo interno ao vértice B.

16. Sejam $\overrightarrow{u}=(2,-1,3)$, $\overrightarrow{v}=(0,1,7)$ e $\overrightarrow{w}=(1,4,5)$, determine:
    (a) $\overrightarrow{u}\times(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w})$. (b) $(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{w})\cdot\overrightarrow{v}$

17. Dados os vetores $\overrightarrow{u} = (-4,-2,4)$, $\overrightarrow{v} = (2,7,-1)$, $\overrightarrow{w} = (6,-3,0)$ e $\overrightarrow{z} = (5,4,-3)$, efetue as operações indicadas em cada caso.
a) $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$; b) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$; c) $(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})(\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{z})$;
d) $(2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}) \times (4\overrightarrow{w} - \overrightarrow{z})$; e) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$; f) $\overrightarrow{u} \times (2\overrightarrow{z} - \overrightarrow{w})$.

18. Mostre que o quadrilátero com vértices em $A(-2,1,-1)$, $B(1,1,3)$, $C(-5,4,0)$ e $D(8,4,-4)$ é um paralelogramo e ache a sua área.

19. Mostre que o quadrilátero com vértices em $A(1,-2,3)$, $B(4,3,-1)$ $C(2,2,1)$ e $D(5,7,-3)$ é um paralelogramo e ache a sua área.

20. Ache a área do triângulo de vértices em $A(4,5,6)$, $B(4,4,5)$ e $C(3,5,5)$.

21. Para que valor de m os pontos $A(m,1,2)$, $B(2,-2,3)$, $C(5,-1,1)$ e $D(3,-2,-2)$ são coplanares?

22. Dados os vetores do $\mathbb{R}^3$

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{k} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{v} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\overrightarrow{i} + \frac{5}{3\sqrt{3}}\overrightarrow{j} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\overrightarrow{k}\,.$$

   (a) Verifique que eles são unitários.
   (b) Sendo θ a medida em radianos do ângulo entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, encontre $\operatorname{sen}\theta$ de duas maneiras:
      i. usando o produto vetorial;
      ii. usando o produto escalar.

23. Calcule o produto misto $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$, onde $\vec{u} = (1,1,0)$, $\vec{v} = (3,-2,2)$ e $\vec{w} = (4,-1,2)$.

24. Calcule o volume do paralelepípedo formado pelos vetores $\vec{u} = (1,2,-3)$, $\vec{v} = (2,0,1)$ e $\vec{w} = (1,-1,4)$.

25. Calcule o volume do paralelepípedo gerado pelo vetores $\vec{u} = (2,2,1)$, $\vec{v} = (1,0,3)$ e $\vec{w} = (0,-4,0)$.