Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Cálculo III
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 03 de Exercícios - Sequências de funções. Série de Funções. Séries de Taylor.

1. Prove que a sequência de funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por
$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$
converge simplesmente para a função identicamente nula.

2. Mostre que a sequência de funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f_n(x) = \frac{x^2+nx}{n}$$
converge simplesmente para a função identidade $f(x) = x$.

3. Se $f_n \to f$ e $g_n \to g$ simplesmente em X, prove que $f_n + g_n \to f + g$ simplesmente em X. O mesmo para $f_n g_n$.

4. Determinar o raio de convergência e o intervalo de convergência de cada série de potência a seguir.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{100^n} x^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(-3)^n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2 2^n}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+2}} x^n$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{\sqrt{2n}}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (\operatorname{senh} n) x^n$ (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n^2+1} (x-1)^n$

5. Encontrar uma representação em série de potências para cada função a seguir, determinando também um intervalo de convergência da mesma.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ (b) $f(x) = \dfrac{3}{1-x^4}$ (c) $f(x) = \dfrac{2}{1+16x^2}$

(d) $f(x) = \dfrac{4}{x-3}$ (e) $f(x) = \dfrac{x}{4x+1}$ (f) $f(x) = \dfrac{3}{x^2+x-2}$

(g) $f(x) = \ln(5-x)$ (h) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$ (i) $f(x) = \arctan \dfrac{x}{4}$

6. Encontre a série de Taylor de cada função a seguir, em torno de cada ponto indicado:

(a) $f(x) = \sin 3x$ em $x = -\dfrac{\pi}{3}$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ em $x = 2$

(c) $f(x) = e^{x-2}$ em $x = 2$ (d) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ em $x = 1$

7. Obtenha o desenvolvimento em série de Taylor para $f(x) = \dfrac{1}{1-2x}$ em $x = -2$ e, em seguida, para $g(x) = \dfrac{1}{(1-2x)^2}$ em $x = -2$.

Sugestão: Escreva $\frac{1}{1-2x} = \frac{1}{5}\frac{1}{1-\frac{2}{5}(x+2)}$.

8. Desenvolver em séries as seguintes funções:

   (a) $e^{-x}\cos x$ (b) $\dfrac{e^x}{1-x}$ (c) $\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+x}}$

   (d) $e^x \tan x$ (e) $(1+x)\cos\sqrt{x}$ (f) $\sqrt{1-x}\ \arctan x$

9. Considere a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, onde $|x| < 1$.

   (a) A partir da série acima, encontre uma representação em séries de potências para $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, apresentando o seu raio de convergência.

   (b) A partir do item anterior e usando integrais, encontre a representação em séries de potências para $\arctan x$. Qual é o seu raio de convergência?

   (c) Conclua que o número irracional π pode ser escrito como a série numérica

$$\pi = 2\sqrt{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$$

10. Ache uma série de potências para xe^x, multiplicando a série e^x por x, e então integre a série termo a termo de 0 a 1, para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+2)} = \frac{1}{2}.$$

11. Obtenha as séries de potências das funções $\ln(1+x)$ e $\ln(1-x)$. A partir delas, mostre que

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + ...\right),\ \forall x \in (-1,1).$$

    Usando os 3 primeiros termos e dando um valor conveniente para x, encontre um valor aproximado para $\ln 5$.

12. Calcule cada integral indefinida abaixo como uma série de potências. Determine também o raio de convergência:

    (a) $\displaystyle\int \frac{t}{1-t^8}dt$ (b) $\displaystyle\int x^2\ln(1+x)dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{x}dx$

13. Mostre que a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

    é uma solução da equação diferencial

$$f''(x) + f(x) = 0.$$