Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Cálculo III - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 02 de Exercícios - Séries numéricas

1. Prove que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

2. **(Sel. Mestr. UFSM 2009/1)** Prove que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}.$

3. O grande matemático suíço Leonhard Euler chegou, algumas vezes, a conclusões erradas em seu pioneiro trabalho sobre séries infinitas. Por exemplo, Euler "deduziu" que

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$$

e

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + ...$$

substituindo $x = -1$ e $x = 2$ na fórmula

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$$

Qual foi o problema ocorrido no raciocínio de Euler?

4. Dadas a s séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$, com $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n+1}$ e $b_n = \log(1 + \frac{1}{n})$, mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Calcule explicitamente as somas parciais s_n e t_n, respectivamente, dessas séries e mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$, logo, as séries dadas são divergentes.

5. Analisar a convergência das séries a seguir e determinar a sua soma.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\frac{n}{n+1}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n^2-1}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{5^{n-1}}$

6. Escreva os primeiros quatro termos de cada série dada e determine se ela é convergente ou divergente. Sendo convergente, determine a sua soma

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{3n+2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\frac{1}{n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \tan^n\frac{\pi}{6}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} [1+(-1)^n]$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\pi n$

7. Para todo $p \in \mathbb{N}$ fixado, prove que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p)}$$

converge.

8. **(Sel. Mestr. UFSM 2011/1)**

(a) Considere duas sequências de números reais não-negativos (a_n) e (b_n) tais que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ para algum $c > 0$. Mostre que $\sum a_n$ converge se, e somente se, $\sum b_n$ converge.

(b) Use o resultado anterior para estudar a convergência das séries $\displaystyle\sum \frac{2n+1}{(n+1)^2}$ e $\displaystyle\sum \frac{1}{2^n-1}$.

9. Verificar se as séries a seguir são convergentes ou divergentes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+5}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+n+2}{5n^3+3n}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$ (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\arctan n}}{1+n^2}$ (k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arccot} n$ (ℓ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

10. Se $\sum a_n$ converge e $a_n > 0$, $\forall n$, mostre que as séries $\sum (a_n)^2$ e $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ também convergem.

11. Prove que, para todo $a \in \mathbb{R}$, a série $a^2 + \dfrac{a^2}{1+a^2} + \dfrac{a^2}{(1+a^2)^2} + \cdots$ é convergente e calcule a sua soma.

12. **(Sel. Mestr. UFSM 2013/2)** Mostre que se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ for convergente e $x_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x_n}}{n}$ converge. (dica: prove que $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ partindo de $0 \leq (a-b)^2$).

13. Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

14. Mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ converge. Sugestão: utilize o segundo limite notável: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

15. Seja $s = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{k^n n!}{n^n}$, onde k é uma constante. Prove que s converge absolutamente se $|k| < e$ e diverge se $|k| > e$.

16. Sejam $a_n > 0$, para todo n, com $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Prove que $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} a_n = 0$.

17. **(Sel. Mestr. UFRGS 2013/2)** Sejam $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série absoultamente convergente e $C > 0$.

    (a) Prove que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} Ca_n$ é absolutamente convergente.

    (b) Prove que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função que satisfaz $|f(x)| \leq C|x|$ para $x \in \mathbb{R}$, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ é absolutamente convergente.

    (c) Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(a_n)$ é absoultamente convergente.

18. Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right)^n$$

é absolutamente convergente.

19. A série $1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} + \ldots$ tem termos alternadamente positivos e negativos e seu termo geral tende para zero. Entretanto, é divergente. Por que isso não contradiz o Teorema de Leibniz?